Traslazioni, Rotazioni, Rototraslazioni.

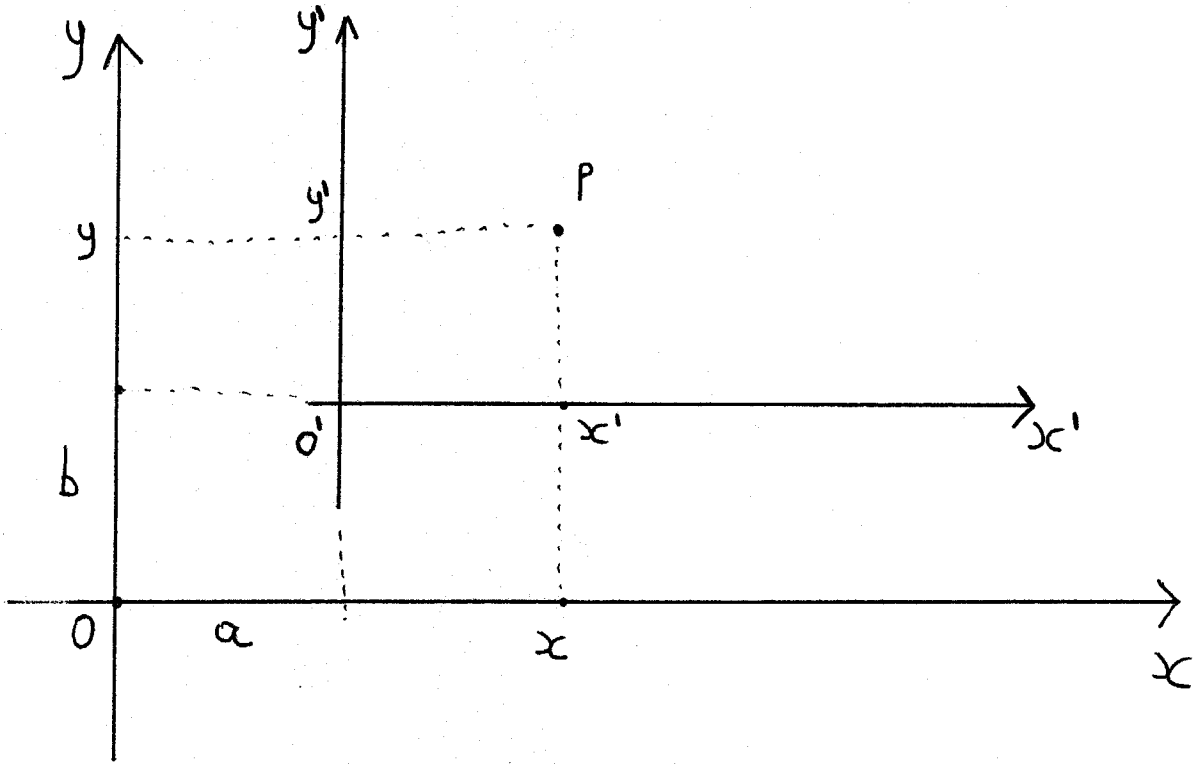
Esempi Svolti

Prof. Francesco Zumbo

www.francescozumbo.it

Angolo orientato		Funzioni goniometriche		
gradi	radianti	seno	coseno	tangente
0°	0	0	1	0
9°	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
15°	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
18°	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$
22°30'	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
36°	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
54°	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
72°	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
75°	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\to \pm\infty$

Traslazioni del sistema di riferimento



Supponiamo di avere 2 sistemi di riferimento

1) $\Sigma(O, x, y)$

2) $\Sigma'(O', x', y')$ sistema di riferimento con le coordinate accentate.

Supponiamo che O' abbia coordinate cartesiane rispetto a Σ

$$O'(a; b) \quad (1)$$

Se consideriamo un qualsiasi punto P avrà coordinate sia rispetto a Σ sia rispetto a Σ'

$P(x;y)$ rispetto a Σ

$P(x';y')$ rispetto a Σ'

Le relazioni tra Σ e Σ' sono

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases} \qquad (2)$$

Le equazioni precedenti ci permettono di calcolare le coordinate di punti nel sistema di riferimento Σ quando sono note le coordinate accentate in Σ'

Ricaviamo x' e y'

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases} \qquad (3)$$

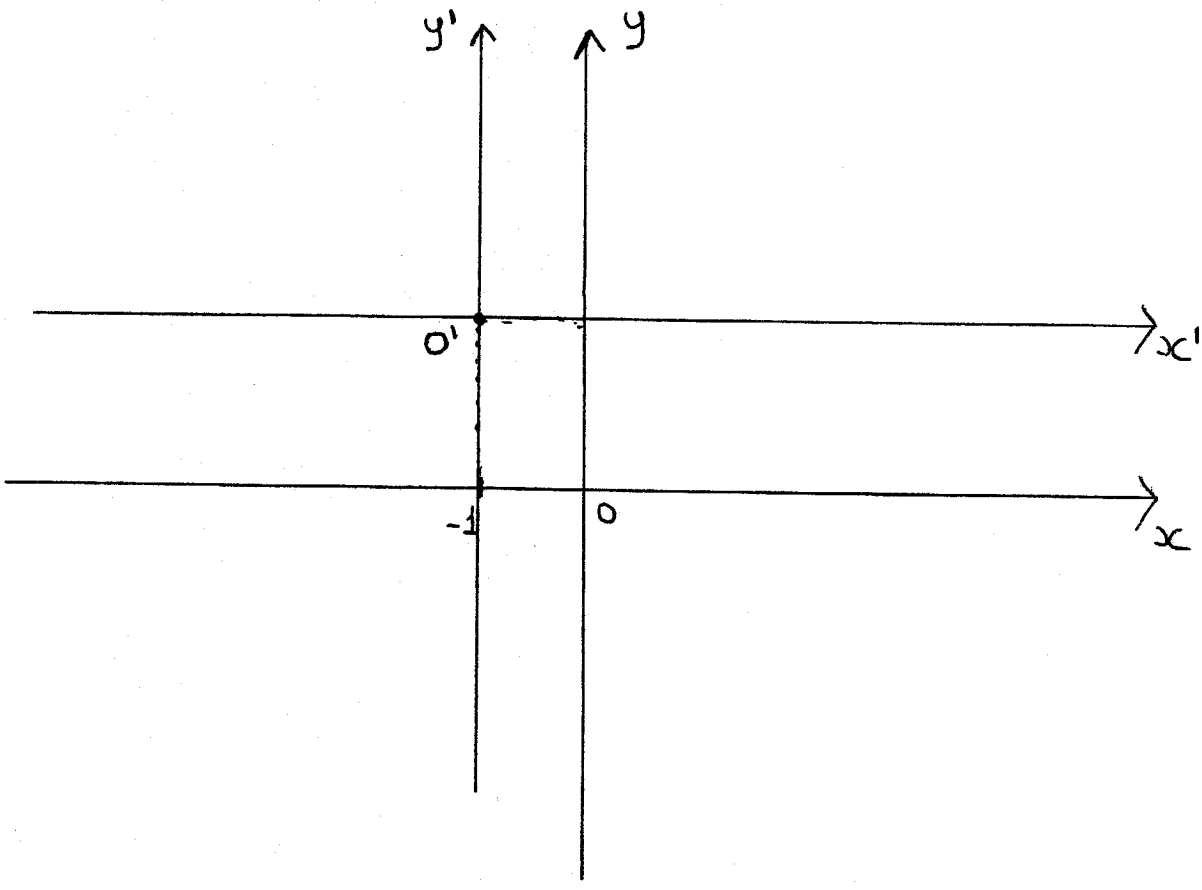
queste ci permettono di calcolare le coordinate in Σ' conoscendo le coordinate in Σ.

OSSERVAZIONE: Un osservatore posto in Σ vede un luogo geometrico nelle variabili x e y; mentre un osservatore posto in Σ' lo vede nelle coordinate accentate.

Esercizio

Sia data la circonferenza con centro nell'origine e raggio 2, che ha equazione in Σ $x^2+y^2-4=0$.

Trovare l'equazione di tale circonferenza in Σ' ottenuto per traslazione, con $O'(-1;2)$



dalle (2) si ha:

$$(2)\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}.$$

e $O'(a;b) = (-1;2)$ (4)

Le (2) particolarizzate con le (4) diventano

$$\begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' + 2 \end{cases} \qquad (5)$$

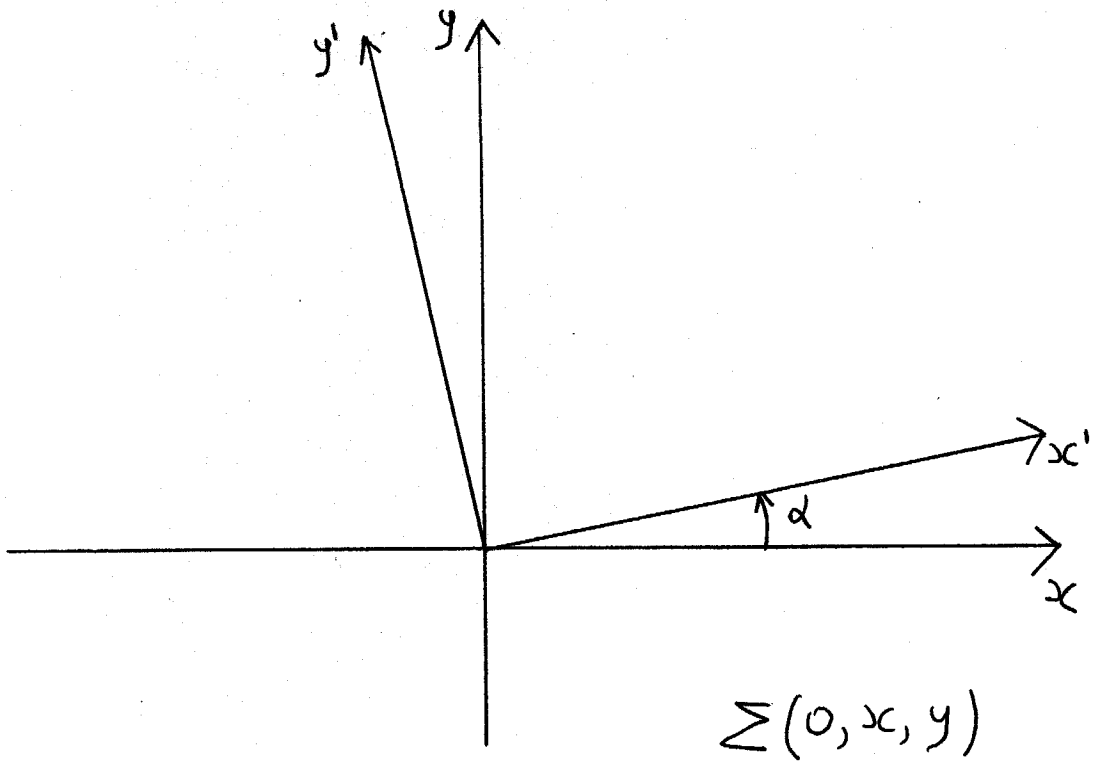
sostituiamo nell'equazione $x^2 + y^2 - 4 = 0$ le (5)

$$(x'-1)^2 + (y'+2)^2 - 4 = 0 \; ; \; x'^2 \underline{+1} - 2x' + y'^2 \underline{+4} + 4y' \underline{-4} = 0 \; ;$$

$$x'^2 + y'^2 - 2x' + 4y' + 1 = 0 \qquad (6)$$

Un osservatore posto in Σ' vede quella circonferenza con l'equazione $x'^2 + y'^2 - 2x' + 4y' + 1 = 0$ mentre un osservatore posto in Σ la vede con l'equazione $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Rotazione degli assi



$\Sigma(0, x, y)$

$\Sigma'(0, x', y')$

Supponiamo una rotazione di un angolo α.

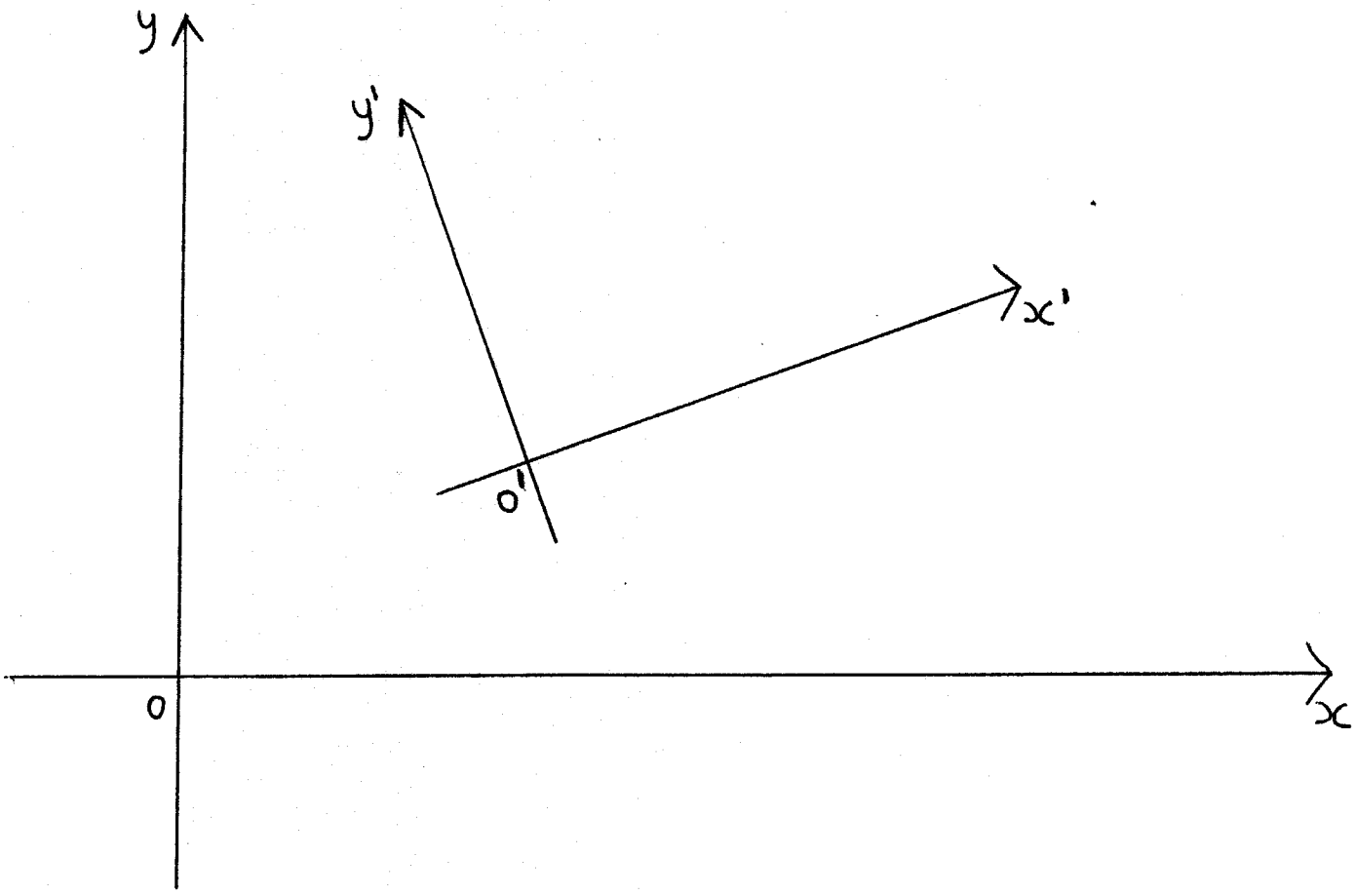
Nel nuovo sistema Σ'

$$(7)\begin{cases} x' = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \operatorname{sen}\alpha \\ y' = -x \cdot \operatorname{sen}\alpha + y \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

Nel vecchio sistema di riferimento Σ

$$(8)\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha \\ y = x' \cdot \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha \end{cases}$$

Rototraslazione



$O'(a;b)$ rispetto a Σ

Supponiamo una rotazione di un angolo α

Nel nuovo sistema Σ'

$$\begin{cases} x' = (x-a)\cdot \cos\alpha + (y-b)\cdot \sin\alpha \\ y' = -(x-a)\cdot \sin\alpha + (y-b)\cdot \cos\alpha \end{cases}$$

Nel vecchio sistema di riferimento

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos\alpha - y' \cdot \operatorname{sen}\alpha + a \\ y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha + b \end{cases}$$

Esercizio

L'equazione $x^2 + xy + 2y^2 - 6 = 0$ (1) rappresenta una ellisse ruotata.
Determinare gli assi rotazioni tali che l'equazione si possa scrivere in forma canonica, cioè che i fuochi appartengono o all'asse X o all'asse Y.

Ricordiamo le equazioni delle rotazioni

$$(2) \begin{cases} x = x' \cdot \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{cases}$$

Sostituiamo tali equazioni nella (1)

$$(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha)^2 + (x' \cdot \cos\alpha - y' \sin\alpha)(x' \sin\alpha + y' \cos\alpha) +$$

$$+ 2(x' \sin\alpha + y' \cos\alpha)^2 - 6 = 0 \;;$$

$$x'^2 \cdot \cos^2\alpha + y'^2 \sin^2\alpha - 2x'y' \cos\alpha \sin\alpha + x'^2 \cos\alpha \cdot \sin\alpha +$$

$$+ x'y' \cos^2\alpha - x'y' \sin^2\alpha - y'^2 \cos\alpha \sin\alpha +$$

$$+ 2x'^2 \sin^2\alpha + 2y'^2 \cos^2\alpha + 4x'y' \sin\alpha \cos\alpha - 6 = 0$$

$$x'^2(\cos^2\alpha + \cos\alpha\sin\alpha + 2\sin^2\alpha) + y'^2(\sin^2\alpha - \cos\alpha\sin\alpha + 2\cos^2\alpha) +$$

$$+ x'y'(-2\cos\alpha\sin\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha) - 6 = 0 \quad (3)$$

Al fine di ottenere la forma canonica, che vede soltanto le variabili x'^2 e y'^2, deve scomparire il termine misto $x'y'$, quindi si deve porre uguale a 0 il coefficiente del termine $x'y'$:

$$-2\cos\alpha\sin\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

$$-\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha = 0 \quad (4)$$

$$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\sin\alpha = 0 \quad (5)$$

dividiamo per $\cos^2\alpha$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = 0 \quad (6)$$

$$tg^2\alpha - 1 - 2tg\alpha = 0$$

$$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 1 = 0 \quad (7)$$

$$tg\,\alpha = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{2})}{2} = \begin{cases} 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \end{cases}$$

Cioè

$$tg\,\alpha_1 = 1 + \sqrt{2} \quad (8)$$

$$tg\,\alpha_2 = 1 - \sqrt{2} \quad (9)$$

Consideriamo il valore positivo $tg\,\alpha_1 = 1+\sqrt{2}$ per l'altro valore il percorso è simile.

$tg\,\alpha_1 = 1+\sqrt{2}$. Visto che $1+\sqrt{2}$ non è un valore noto applichiamo la funzione arc tg

$$arctg\,(tg\,\alpha_1) = arc\,tg\,(1+\sqrt{2})$$

$$\alpha_1 = arctg\,(1+\sqrt{2})$$

$$\alpha_1 = 67^\circ\,30' \quad (10)$$

Nelle (3) ipotizziamo $\alpha = 67° 30'$

in tal modo il coefficiente di $x'y'$ è uguale a 0

Quindi la (3) diviene per $\alpha = 67° 30'$

$$x'^2\left(\cos^2\alpha + \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha + 2\operatorname{sen}^2\alpha\right) + y'^2\left(\operatorname{sen}^2\alpha - \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha + 2\cos^2\alpha\right) - 6 = 0 \quad (11)$$

Scriviamola in altra forma

$$x'^2\left(\cos^2\alpha + \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha\right) + y'^2\left(\operatorname{sen}^2\alpha - \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha\right) - 6 = 0 \quad (12)$$

Dalla relazione fondamentale della goniometria, sappiamo che

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \quad (13)$$

$$x'^2\left(1 + \operatorname{sen}^2\alpha + \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha\right) + y'^2\left(1 + \cos^2\alpha - \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha\right) - 6 = 0 \quad (14)$$

Dalle formule di goniometria scriviamo quelle dove $\operatorname{sen}^2\alpha$; $\cos^2\alpha$; $\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha$ sono in funzione di $tg\,\alpha$. Ricordiamo che il valore $\alpha = 67° 30'$ è fisso.

Noi sappiamo che:

$$(15) \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{1 + tg^2\alpha}$$

$$(16) \quad \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

Moltiplichiamo membro a membro la (15) e la (16) (12)

$$\cos^2\alpha \cdot \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha} \cdot \frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha \cdot \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{(1+tg^2\alpha)^2} \qquad (17)$$

$$\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha = \frac{tg\alpha}{1+tg^2\alpha} \qquad (18)$$

La (14) con le (15), (16), (18) e nell'ultima che $\alpha = 67° 30'$ si semplifica notevolmente.

Ricordiamo che stiamo considerando

$$tg\,\alpha_1 = 1+\sqrt{2} \qquad (8)$$

Dalla (14) tutte tali ipotesi si ha:

$$x'^2\left(1+\frac{(1+\sqrt{2})^2}{1+(1+\sqrt{2})^2}+\frac{1+\sqrt{2}}{1+(1+\sqrt{2})^2}\right)+$$

$$+y'^2\left(1+\frac{1}{1+(1+\sqrt{2})^2}-\frac{1+\sqrt{2}}{1+(1+\sqrt{2})^2}\right)-6=0$$

(19)

$$x'^2\left(\frac{1+(1+\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{2})^2+1+\sqrt{2}}{1+(1+\sqrt{2})^2}\right)+$$

$$+y'^2\left(\frac{1+(1+\sqrt{2})^2+1-1-\sqrt{2}}{1+(1+\sqrt{2})^2}\right)-6=0$$

$$x'^2\left(\frac{1+1+2+2\sqrt{2}+1+2+2\sqrt{2}+1+\sqrt{2}}{1+1+2+2\sqrt{2}}\right)+$$

$$+y'^2\left(\frac{1+1+2+2\sqrt{2}+x-x-\sqrt{2}}{1+1+2+2\sqrt{2}}\right)-6=0$$

$$x'^2\left(\frac{8+5\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}\right)+y'^2\left(\frac{4+\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}\right)-6=0$$

$$x'^2\left(\frac{8+5\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}\right)+y'^2\left(\frac{4+\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}\right)=6 \quad (20)$$

dividiendo por 6

$$\frac{x'^2\left(\frac{8+5\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}\right)}{6}+\frac{y'^2\left(\frac{4+\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}\right)}{6}=1$$

$$x'^2 \frac{\frac{8+5\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}}{6} + \frac{\frac{4+\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}}{6} y'^2 = 1$$

$$x'^2 \frac{8+5\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{6} + y'^2 \frac{4+\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{6} = 1$$

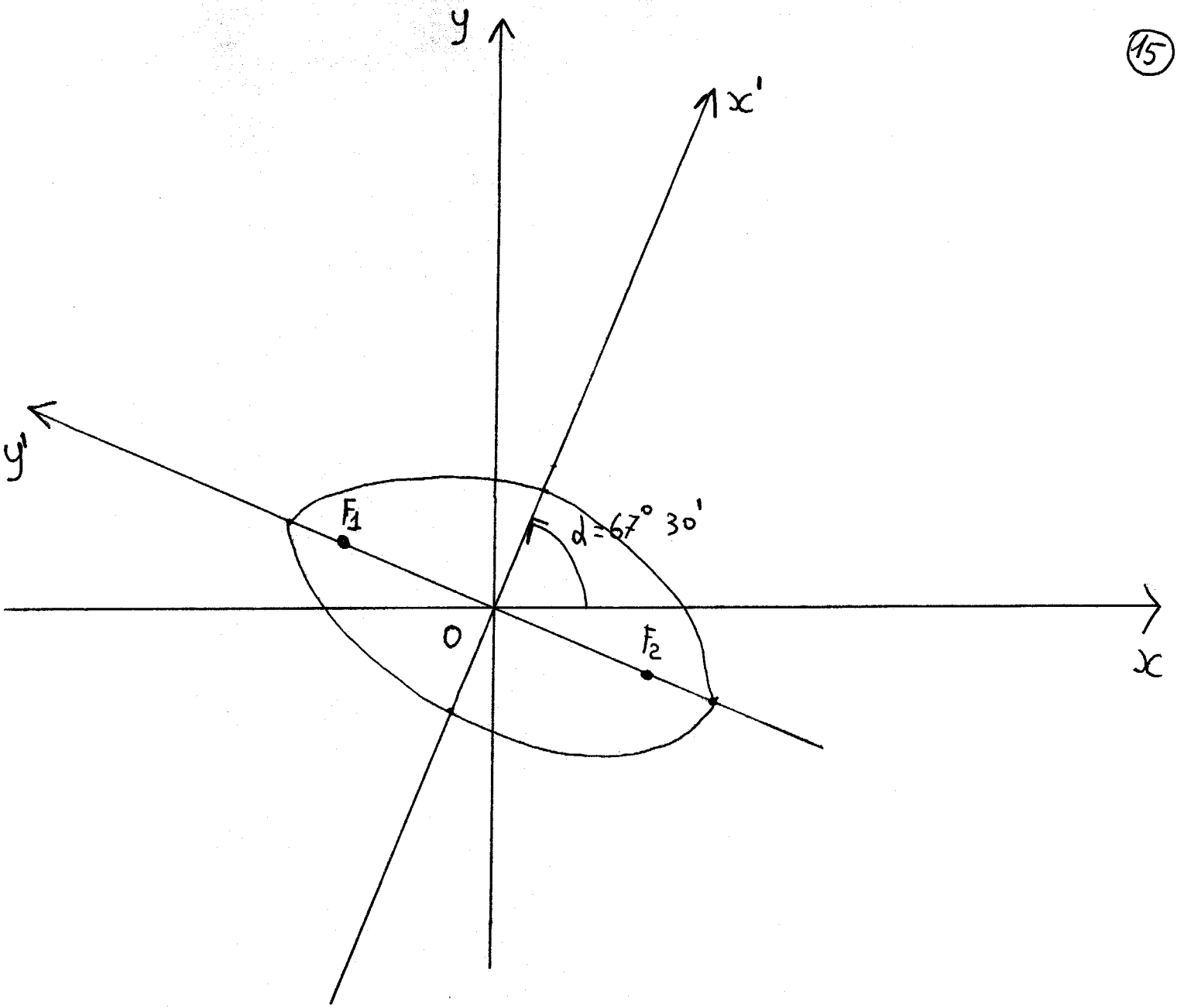
$$x'^2 \frac{8+5\sqrt{2}}{24+12\sqrt{2}} + y'^2 \frac{4+\sqrt{2}}{24+12\sqrt{2}} = 1$$

$$\frac{x'^2}{\frac{24+12\sqrt{2}}{8+5\sqrt{2}}} + \frac{y'^2}{\frac{24+12\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}} = 1 \quad (21)$$

La (21) rappresenta la forma canonica cercata con

$$a^2 = \frac{24+12\sqrt{2}}{8+5\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad b^2 = \frac{24+12\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$



Un osservatore posto in $\Sigma(O, x, y)$ vede l'ellisse con equazione $x^2 + xy + 2y^2 - 6 = 0$

Un osservatore posto in $\Sigma'(O, x', y')$ vede la stessa ellisse con equazione:

$$\frac{x'^2}{\frac{24 + 12\sqrt{2}}{8 + 5\sqrt{2}}} + \frac{y'^2}{\frac{24 + 12\sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}}} = 1$$

Esercizio

Determinare l'opportuna rotazione del sistema $\Sigma(O,x,y)$ in modo tale che la parabola γ di equazione in Σ

$$(1) \qquad \gamma: x^2 - 2xy + y^2 + \sqrt{2}\,x - 3\sqrt{2}\,y = 0$$

abbia nel nuovo sistema di riferimento Σ', ruotato rispetto a Σ, asse di simmetria parallelo ad uno degli assi.

Dalla teoria conosciamo le equazioni delle rotazioni

$$(2) \begin{cases} x' = x \cdot \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha \\ y' = -x \operatorname{sen}\alpha + y \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha \\ y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha \end{cases}$$

Sostituiamo le (3) in (1)

$$\left(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha\right)^2 - 2\left(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha\right)\left(x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha\right) +$$

$$+\left(x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha\right)^2 + \sqrt{2}\left(x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha\right) - 3\sqrt{2}\cdot$$

$$\cdot\left(x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha\right) = 0 \;;$$

$$x'^2\cos^2\alpha + y'^2\operatorname{sen}^2\alpha - 2x'y'\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha -$$

$$-2\left(x'^2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + x'y'\cos^2\alpha - x'y'\operatorname{sen}^2\alpha - y'^2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\right) +$$

$$+ x'^2\operatorname{sen}^2\alpha + y'^2\cos^2\alpha + 2x'y'\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha +$$

$$+ x'\sqrt{2}\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha\sqrt{2} - x'\cdot 3\sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha -$$

$$- y'\cdot 3\sqrt{2}\cos\alpha = 0 \;;$$

$$x'^2\cos^2\alpha + y'^2\operatorname{sen}^2\alpha - 2x'y'\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha -$$

$$- 2x'^2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha - 2x'y'\cos^2\alpha + 2x'y'\operatorname{sen}^2\alpha +$$

$$+ 2y'^2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + x'^2\operatorname{sen}^2\alpha + y'^2\cos^2\alpha + 2x'y'\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha +$$

$$+ x'\sqrt{2}\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha\sqrt{2} - x'\cdot 3\sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha -$$

$$- y'3\sqrt{2}\cos\alpha = 0 \;;$$

$$x'^2\left(\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha\right) +$$

$$+ y'^2\left(\operatorname{sen}^2\alpha + 2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + \cos^2\alpha\right) +$$

$$+ x'y'\left(-2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\operatorname{sen}^2\alpha + 2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\right) +$$

$$+ x'\left(\sqrt{2}\cos\alpha - 3\sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha\right) + y'\left(-\operatorname{sen}\alpha\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\cos\alpha\right) = 0 \;;$$

$$x'^2\left(1 - 2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\right) + y'^2\left(1 + 2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\right) +$$

$$+ x'y'\left(2\operatorname{sen}^2\alpha - 2\cos^2\alpha\right) + x'\left(\sqrt{2}\cos\alpha - 3\sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha\right) -$$

$$- y'\left(\operatorname{sen}\alpha\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\cos\alpha\right) = 0 \qquad (4)$$

Al fine di ottenere una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse X o all'asse Y deve essere nullo il coefficiente del termine misto $(x'y')$:

$$2\,\mathrm{sen}^2\alpha - 2\cos^2\alpha = 0$$

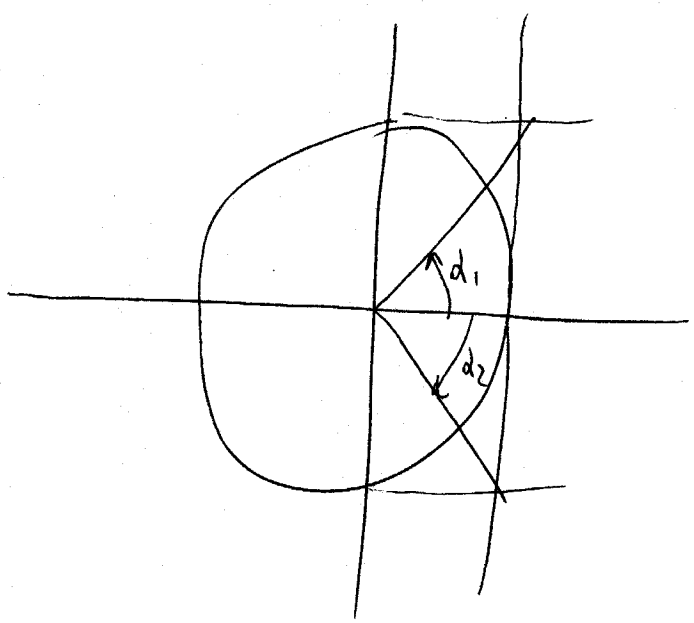
$$\mathrm{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha = 0 \qquad (5)$$

dividiamo per $\cos^2\alpha$

$$\frac{\mathrm{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 0$$

$$tg^2\alpha - 1 = 0 \;\; ; \;\; tg^2\alpha = 1 \;\; ;$$

$$tg\,\alpha = \pm 1$$



α_1 e α_2 sono soluzioni

$\alpha_1 = 45°$ e $\alpha_2 = 45°$ sono soluzioni

Scegliamo $\alpha_2 = -45°$ quanto per fissare le idee.

Per $\alpha_2 = -45°$ il termine misto è nullo.

Adesso dobbiamo particolarizzare le (4) in funzione di 2 ipotesi:

1) per $\alpha = -45°$ $x'y'$ è nullo

2) per $\alpha = -45° \Rightarrow$

$$\cos(-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}(-45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dalla (4) si ottiene sotto le 2 precedenti ipotesi

$$x'^2\left(1-\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)+y'^2\left(1+\cancel{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right)\right)+$$

$$\cancel{4x'y'}+x'\left(\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}-3\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)-$$

$$-y'\left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\sqrt{2}+3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0\ ;$$

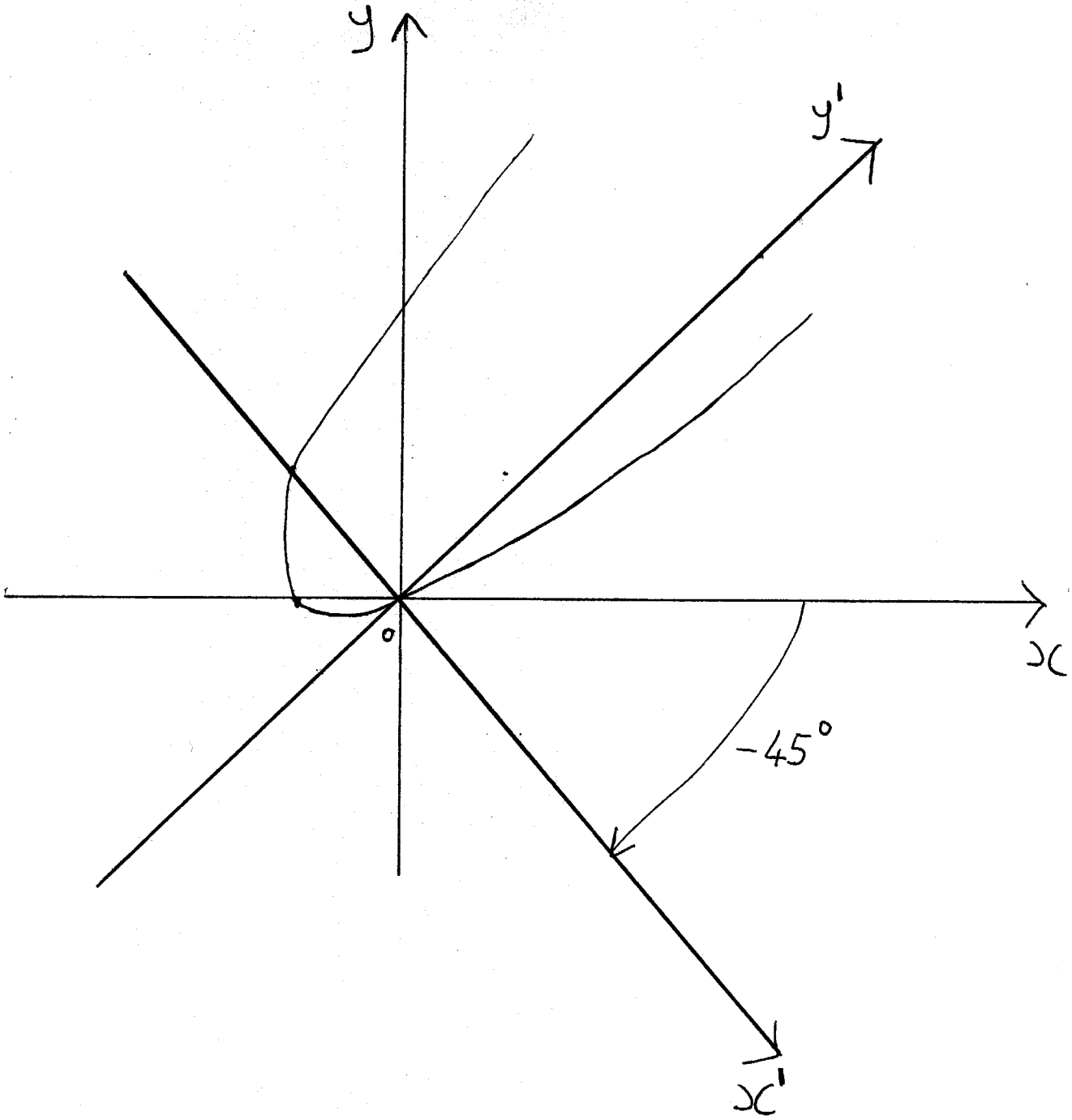
$$x'^2\left(1+\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\right)+y'^2\left(1-\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\right)+x'\left(\frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{2}}+\frac{3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}}\right)-$$

$$-y'\left(-\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}+\frac{3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}}\right)=0$$

$$2x'^2+0\,y'^2+x'(4)-y'(-1+3)=0$$

$$2x'^2+4x'-2y'=0\ ;\ -2y'=-2x'^2-4x'$$

$$y'=x'^2+2x'$$ ed è questa l'equazione cercata


y
y'
x
o
-45°
x'