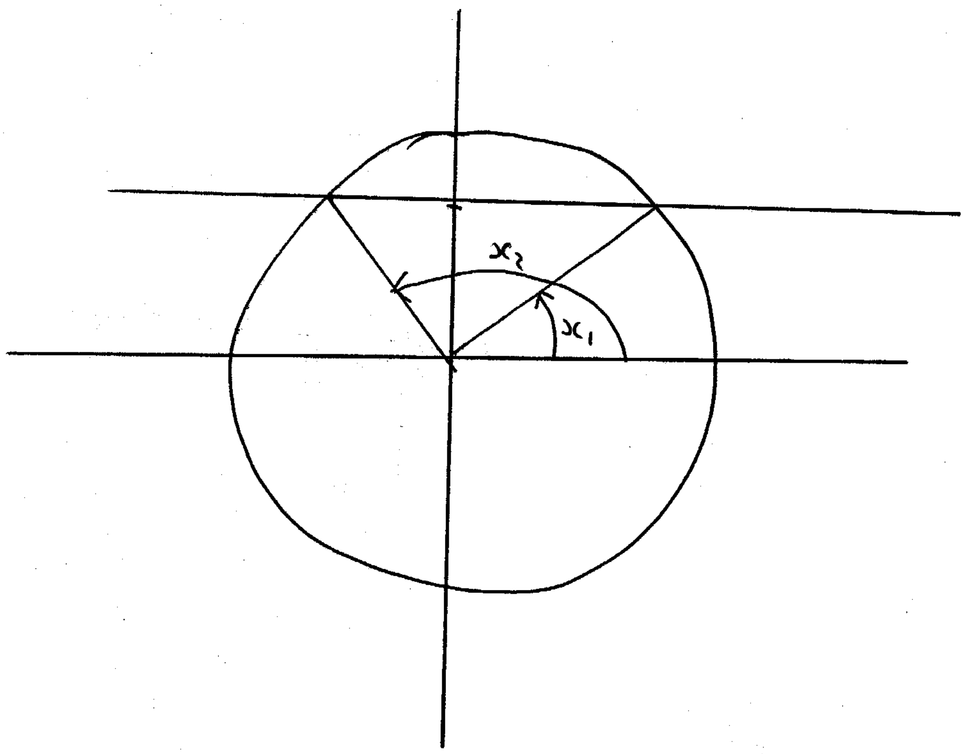
$$\text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

dalle tabelle del valore del seno sappiamo che

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



per gli archi associati sappiamo che se $x_1 = \frac{\pi}{4}$

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - \pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

Da cui: $\text{sen}\,\frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

studiamo l'equazione associata

$$\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

poniamo $t=2x+\frac{\pi}{3}$

$$\operatorname{sen} t=\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi$$

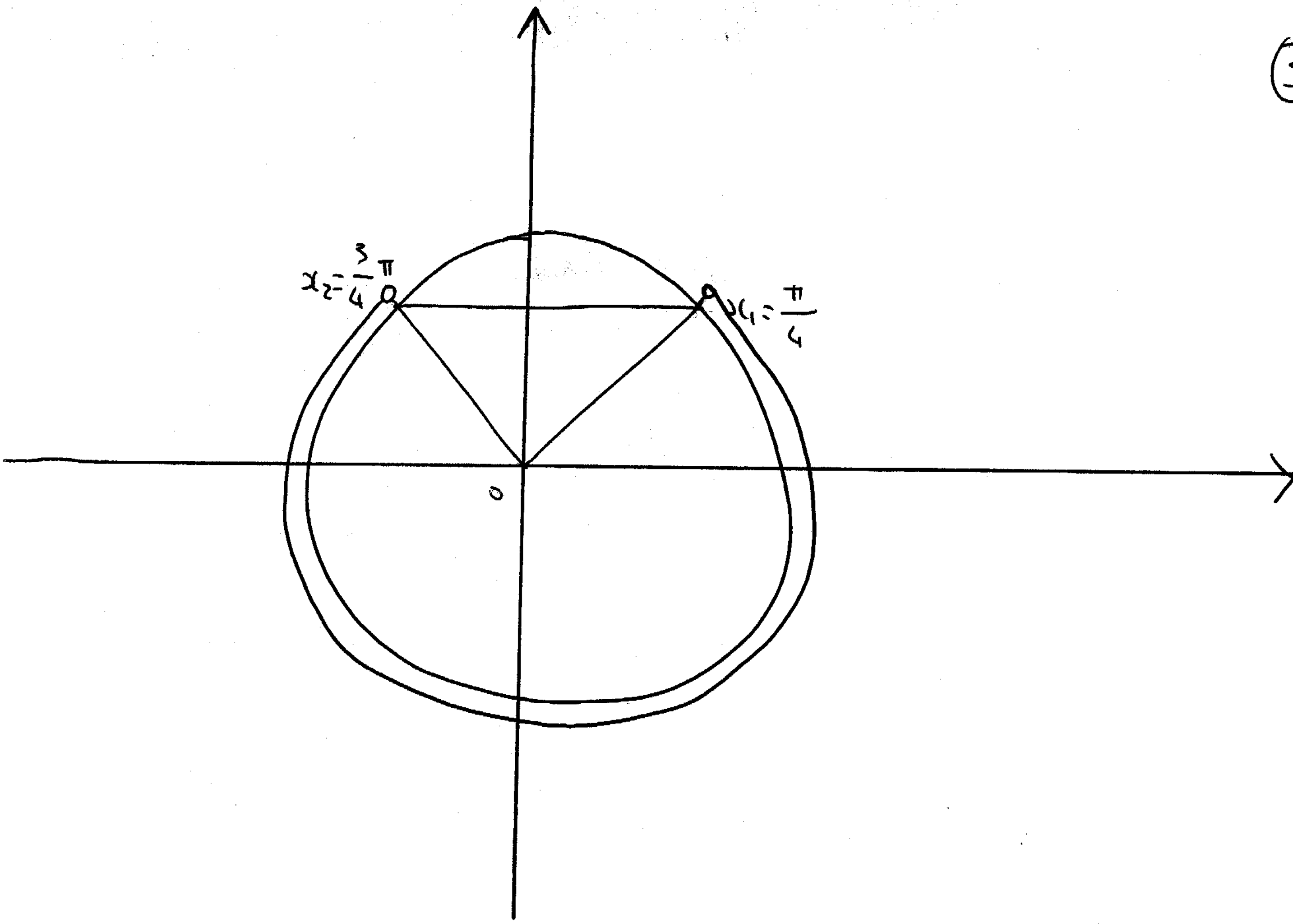
1ª soluzione

$$t=\frac{\pi}{4}+K2\pi$$

2ª soluzione $t=\frac{3}{4}\pi+K2\pi$

Studiamo la disequazione

$$\operatorname{sen} t<\frac{\sqrt{2}}{2}$$



La soluzione in t è

$0 \leq t < \frac{\pi}{4} \cup \frac{3}{4}\pi < t \leq 2\pi$

essendo 2π la periodicità del seno:

$k2\pi \leq t < \frac{\pi}{4} + k2\pi \cup \frac{3}{4}\pi + k2\pi < t \leq 2\pi + k2\pi$

torniamo alla variabile x sapendo che

$t = 2x + \frac{\pi}{3}$

$k2\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{4} + k2\pi \cup \frac{3}{4}\pi + k2\pi < 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2\pi + k2\pi$

$$k2\pi - \frac{\pi}{3} \leq 2x < \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + k2\pi \cup \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi < 2x \leq \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + k2\pi$$ 4

dividendo por 2

$$k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{6} + k\pi \cup \frac{3}{8}\pi - \frac{\pi}{6} + k\pi < x \leq \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$-\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x < \frac{3\pi - 4\pi}{24} + k\pi \cup \frac{9\pi - 4\pi}{24} + k\pi < x \leq \frac{3\pi - 4\pi}{24} + k\pi$$

$$-\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x < \frac{-\pi}{24} + k\pi \cup \frac{5\pi}{24} + k\pi < x \leq -\frac{\pi}{24} + k\pi$$

Esercizio

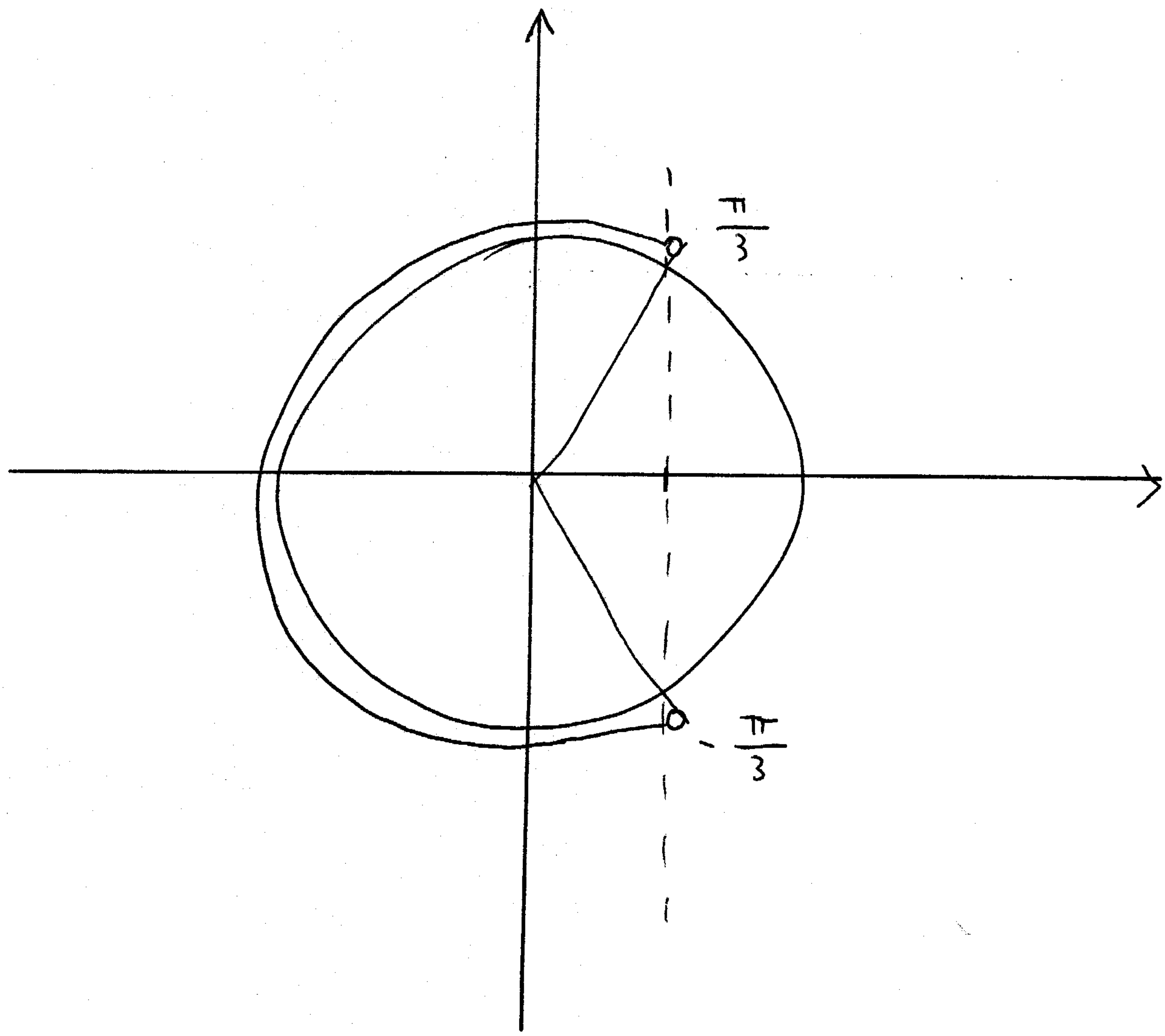
$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}$

poniamo $t = x - \frac{\pi}{3}$

$\cos t < \frac{1}{2}$

studiamo l'equazione associata

$\cos t = \frac{1}{2}$



dalle tabelle dei valori del seno:

$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ e $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

la disequazione in t ha soluzione

$$\frac{\pi}{3} < t < -\frac{\pi}{3}$$

esprimiamo $-\frac{\pi}{3}$ in formulazione positiva

$$-\frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$$

da cui la disequazione ha soluzioni

$$\frac{\pi}{3} < t < \frac{5}{3}\pi$$

il periodo del coseno è $2K\pi$

$$\frac{\pi}{3} + K2\pi < t < \frac{5}{3}\pi + K2\pi$$

torniamo alla variabile x, sapendo che

$$t = x - \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3} + k2\pi < x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi + k2\pi$$

sommiamo $\frac{\pi}{3}$ a tutta la relazione

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{5}{3}\pi + \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$\frac{2}{3}\pi + k2\pi < x < \frac{6\pi}{3} + k2\pi$$

$$\frac{2}{3}\pi + k2\pi < x < 2\pi + k2\pi$$

Esercizio

$$\cos 2x - 2\cos x + 1 > 0 \quad (1)$$

applichiamo la formula di duplicazione del coseno

Scriviamo le varie formule di duplicazione del coseno

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

scegliamo quella che contiene soltanto la funzione $\cos x$ in modo tale che la (1) abbia soltanto una funzione goniometrica $(\cos x)$.

$$2\cos^2 x - \cancel{1} - 2\cos x + \cancel{1} > 0 \quad (2)$$

$$2\cos^2 x - 2\cos x > 0$$

$$\cos^2 x - \cos x > 0 \quad (3)$$

poniamo $\cos x = t$ (4)

$$t^2 - t > 0 \quad (5)$$

La studiamo come disequazione completa per evitare di dover svolgere il prodotto dei segni

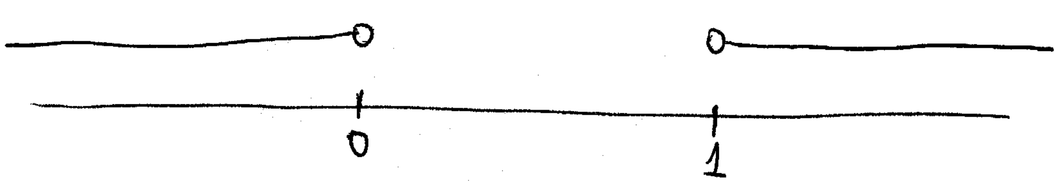
$\Delta = 1 - 4(1)(0) = 1$

troviamo le soluzioni dell'equazione associata

$t^2 - t = 0$

$t(t^{*} - 1) = 0$; $t = 0$; $t^{*} = 1$; $t = 1$

essendo $\Delta > 0$ e la famiglia è > 0 implica che è verificata per valori esterni

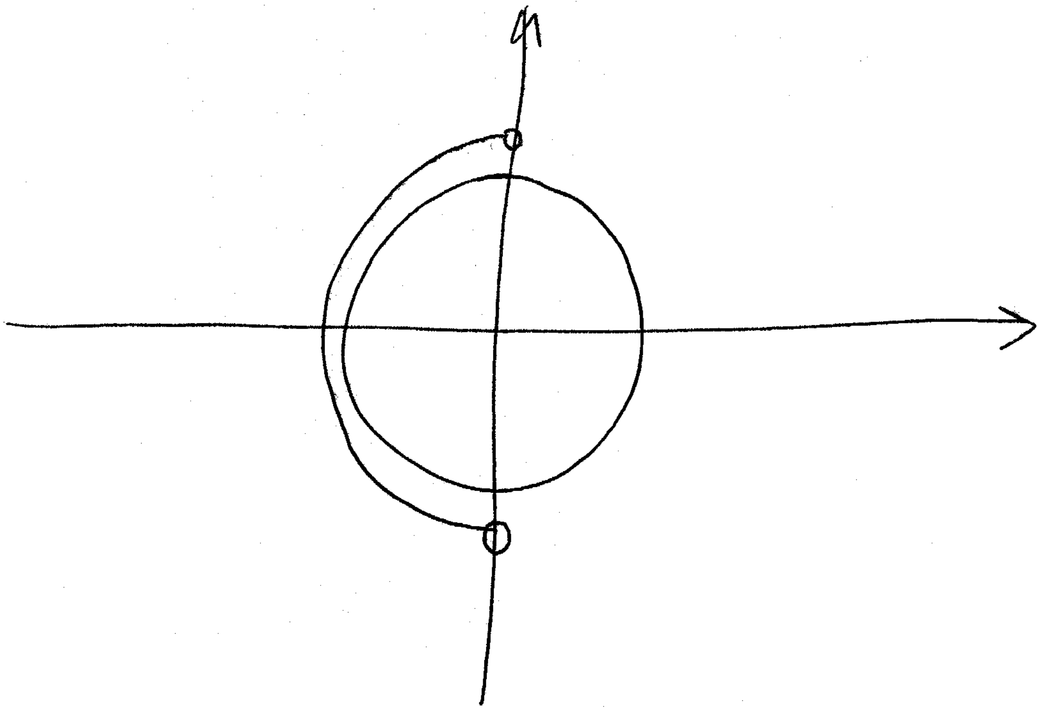


dobbiamo studiare adesso

$\cos x > 1 \quad \cup \quad \cos x < 0$

1) $\cos x > 1$ non è mai verificata

2) $\cos x < 0$



$\cos x < 0$ è verificata per

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + k2\pi$$

Esercizio (disequazione goniometrica lineare)

$$\cos x + 1 < (1-\sqrt{2})\,\mathrm{sen}\,x \qquad (1)$$

$$\cos x - (1-\sqrt{2})\,\mathrm{sen}\,x + 1 < 0 \qquad (2)$$

inseriamo le formule parametriche nella (2)

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad e \quad \mathrm{sen}\,x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{con} \qquad (3)$$

$$t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} \qquad (4)$$

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} - (1-\sqrt{2})\frac{2t}{1+t^2} + 1 < 0 \qquad (5)$$

$$\frac{1-\cancel{t^2} - (1-\sqrt{2})2t + 1 + \cancel{t^2}}{1+t^2} < 0$$

$$\frac{1 - 2t + 2\sqrt{2}t + 1}{1+t^2} < 0$$

$$\frac{t(2\sqrt{2}-2) + 2}{1+t^2} < 0 \qquad (6)$$

adesso si tratta di risolvere la disequazione fratta (6)

Il denominatore $D(t) = 1+t^2$ è sempre > 0

dobbiamo soltanto controllare se per qualche valore di t $D(t)$ vale $\emptyset$. In tal caso, tali valori di t che manderebbero a $\emptyset$ $D(t)$ dobbiamo scartarli

$$t^2+1=0 \; ; \; t^2=-1 \; ; \; t=\pm\sqrt{-1} \; ; \; t=\pm i$$

quindi non esistono $t \in \mathbb{R}$ tali che $D(t)=0$

In definitiva $D(t) > 0$ sempre. $\forall t \in \mathbb{R}$

Studiamo $N(t) > 0$

$$t(2\sqrt{2}-2)+2>0 \; ; \; t(2\sqrt{2}-2)>-2 \; ;$$

La quantità $2\sqrt{2}-2$ è >0 quindi si ha:

$$t > \frac{-2}{2\sqrt{2}-2} \; ; \; t > \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}(\sqrt{2}-1)}$$

$$t > \frac{-1}{\sqrt{2}-1} \qquad (7)$$

$$t > \frac{-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{-1\,(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} =$$

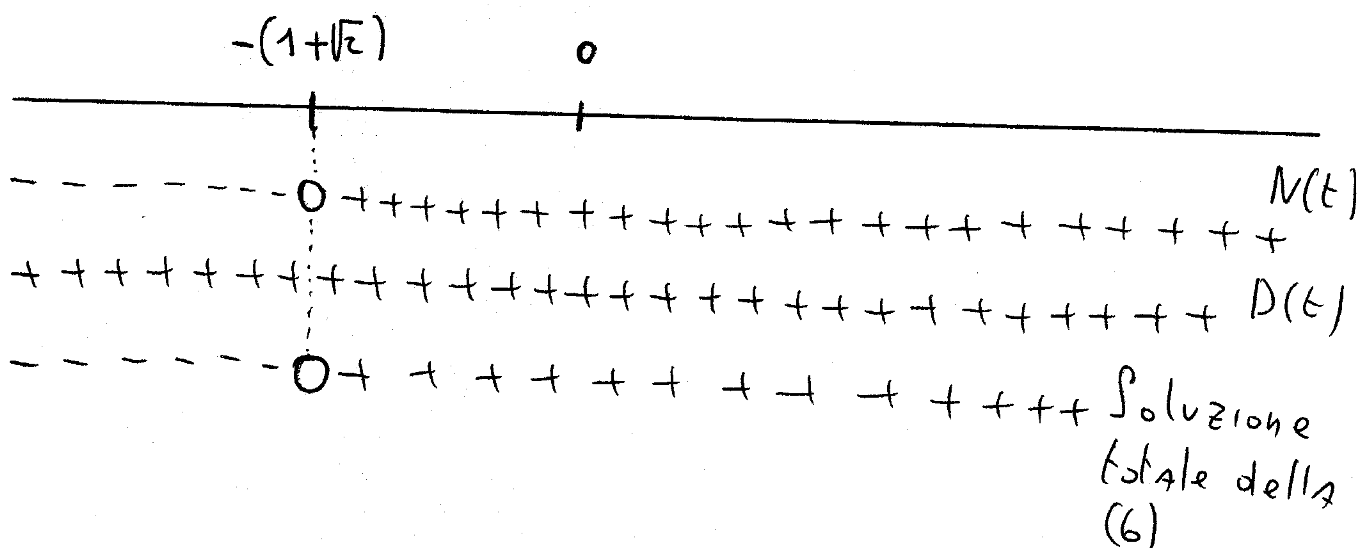
$$= \frac{-(\sqrt{2}+1)}{2-1} = \frac{-(\sqrt{2}+1)}{1} =$$

$$= -(1+\sqrt{2})$$

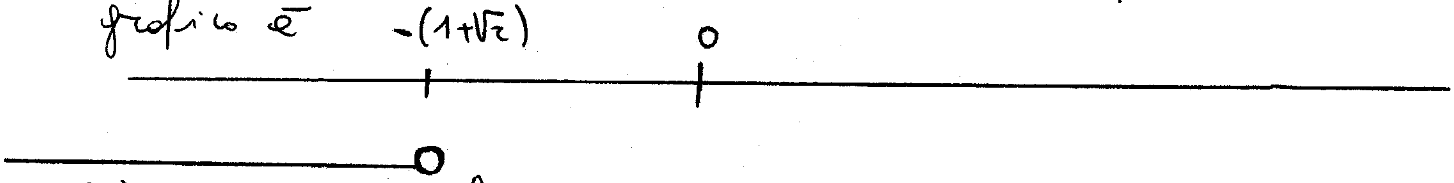
Cioè

$$t > -(1+\sqrt{2}) \qquad (8)$$

Adesso abbiamo tutti gli elementi per studiare la (6)



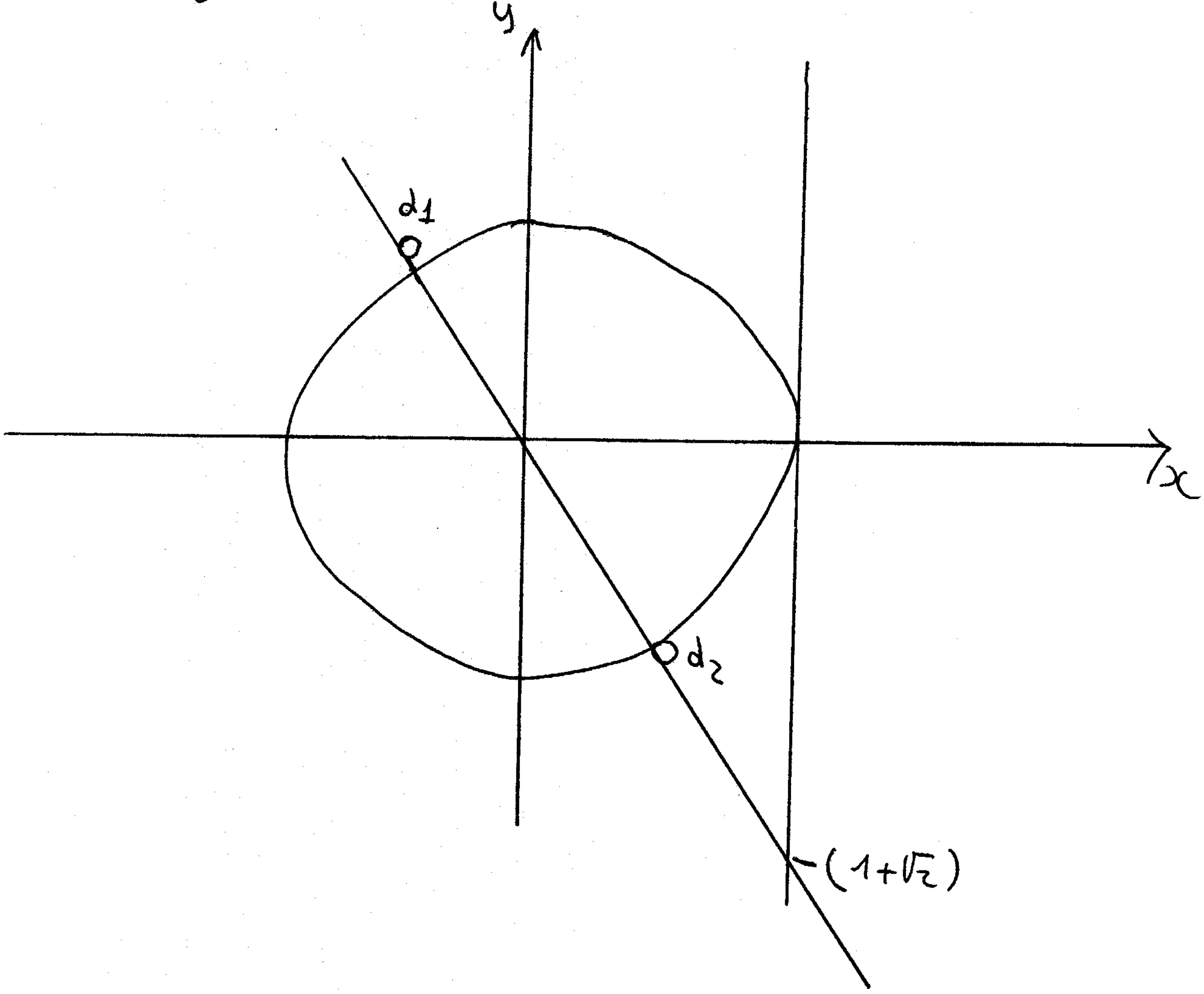
La (6) cerca le quantità negative quindi il grafico è



(9) Soluzione totale della (6) in linea continua

Per la sostituzione $t = tg\frac{x}{2}$ si ha (10)

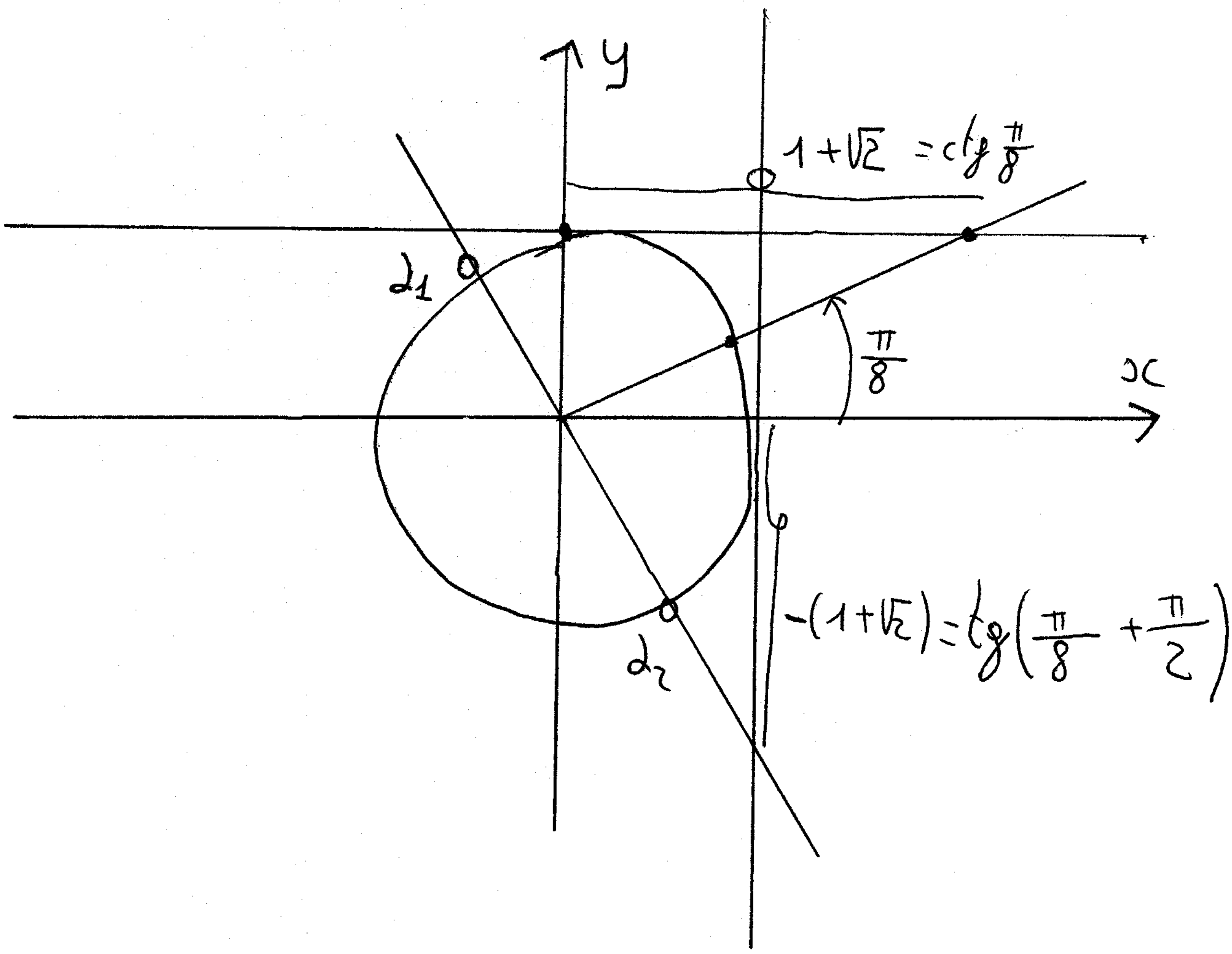
$$tg\frac{x}{2} < -(1+\sqrt{2}) \quad (11)$$



Per prima cosa dobbiamo trovare il valore di α_1 e di α_2, ma guardando i valori della tangente non troviamo il valore $-(1+\sqrt{2})$, ma nella colonna della cotangente troviamo:

$$(12) \quad ctg\frac{\pi}{8} = ctg\, 22^\circ 30' = \sqrt{2}+1$$

Visto che $ctg\,\alpha$ e $tg\,\alpha$ sono legate dalla teoria degli archi associati, cerchiamo di calcolare l'angolo α tale che $tg\,\alpha = -(1+\sqrt{2})$ partendo da $ctg\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}+1$



dagli archi associati sappiamo che (e si vede anche dal disegno precedente)

$$ctg\,\alpha = -\,tg\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) \qquad (13)$$

da cui

$$-(1+\sqrt{2}) = tg\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right) \qquad (14)$$

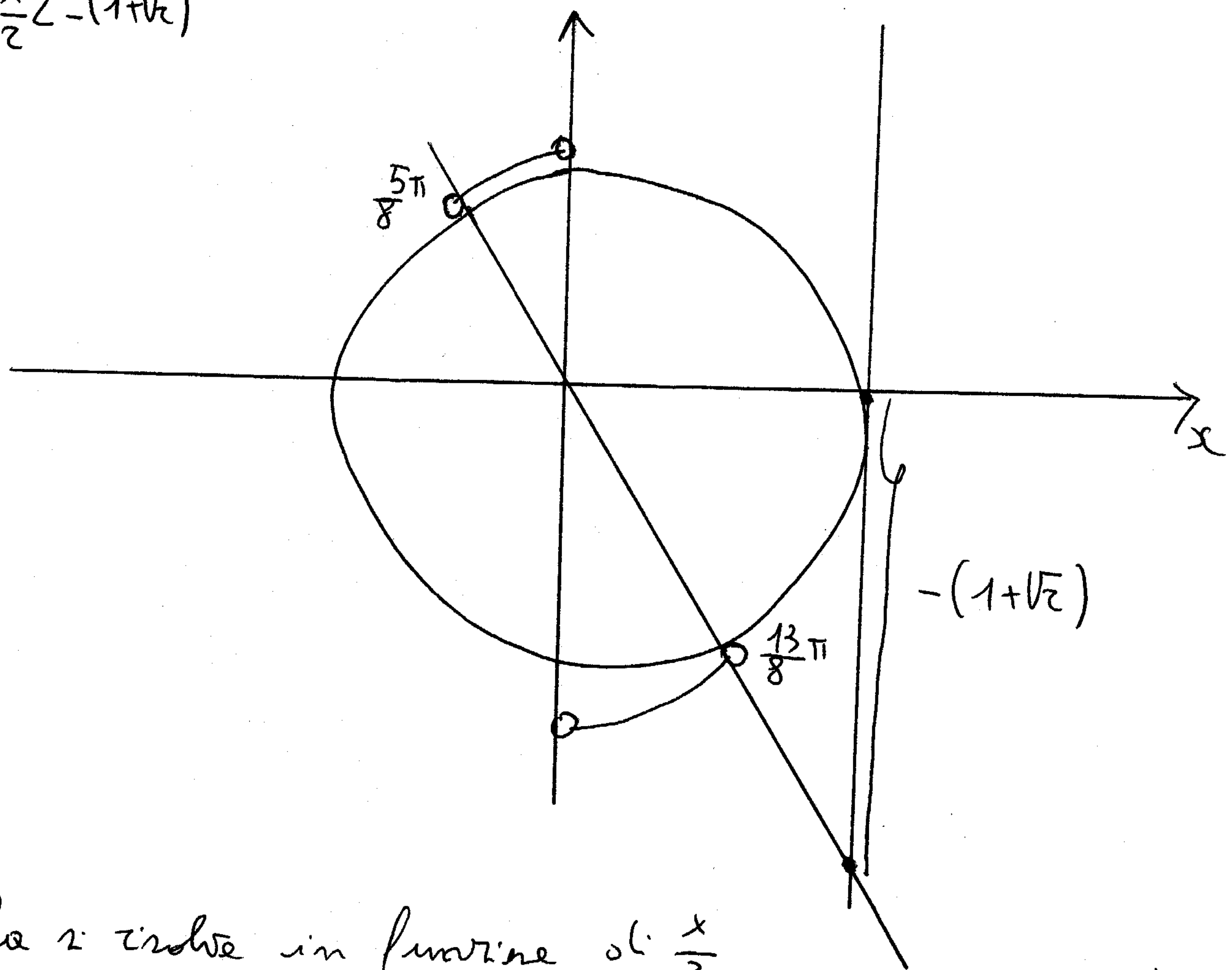
Calcoliamo il valore di α_1

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi + 4\pi}{8} = \frac{5}{8}\pi \qquad (15)$$

$$\alpha_2 = \frac{5}{8}\pi + \pi = \frac{5\pi + 8\pi}{8} = \frac{13}{8}\pi \qquad (16)$$

Riassumiamo i risultati significativi ottenuti

$tg\frac{x}{2} < -(1+\sqrt{2})$



la si risolve in funzione di $\frac{x}{2}$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{5}{8}\pi \quad \cup \quad \frac{3}{2}\pi < \frac{x}{2} < \frac{13}{8}\pi \qquad (17)$$

con la periodicità $K\pi$ essendo la tangente

$$\frac{\pi}{2} + K\pi < \frac{x}{2} < \frac{5}{8}\pi + K\pi \qquad (18)$$

moltiplichiamo per 2

$$\pi + k2\pi < x < \frac{5}{8} \cdot 2\pi + k2\pi;$$

$$\pi + k2\pi < x < \frac{5}{4}\pi + k2\pi$$

Esercizio d.g. lineare

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+(\sqrt{3}+2)\,\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1>0 \quad (1)$$

poniamo $y=x+\frac{\pi}{6}$ (2)

$$\cos y+(\sqrt{3}+2)\,\text{sen}\,y+1>0 \quad (3)$$

Inseriamo le formule parametriche

$\text{sen}\,y=\frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos y=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ con $t=\text{tg}\frac{y}{2}$ (4)

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}+(\sqrt{3}+2)\frac{2t}{1+t^2}+1>0$$

$$\frac{1-\cancel{t^2}+(\sqrt{3}+2)\cdot 2t+1+\cancel{t^2}}{1+t^2}>0$$

$$\frac{2+(\sqrt{3}+2)\cdot 2t}{1+t^2}>0$$

$$\frac{2+(2\sqrt{3}+4)\cdot t}{1+t^2}>0$$

$D(t) > 0$ sempre $\forall t \in \mathbb{R}$

$2 + (2\sqrt{3}+4)t > 0$; $(2\sqrt{3}+4)t > -2$;

le quantità $2\sqrt{3}+4$ è $> 0 \Rightarrow$

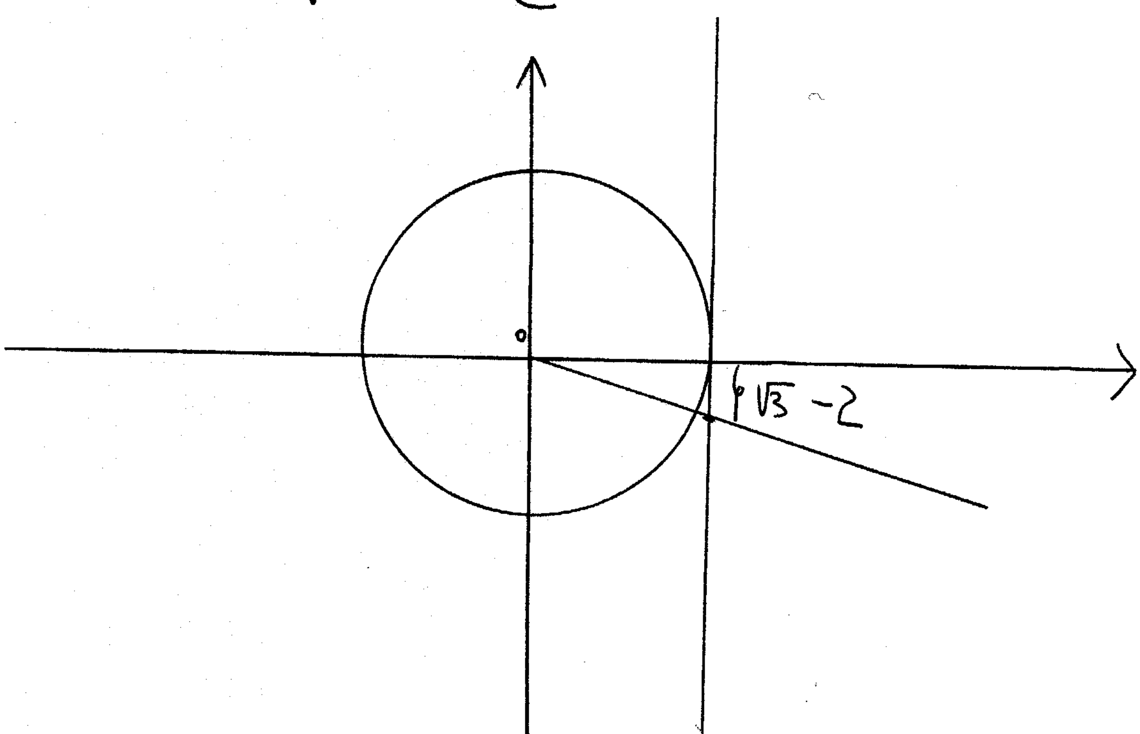
$$t > \frac{-2}{2\sqrt{3}+4} \quad (5)$$

$$t > \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}(\sqrt{3}+2)}; \quad t > \frac{-1}{\sqrt{3}+2} = \frac{-1(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} =$$

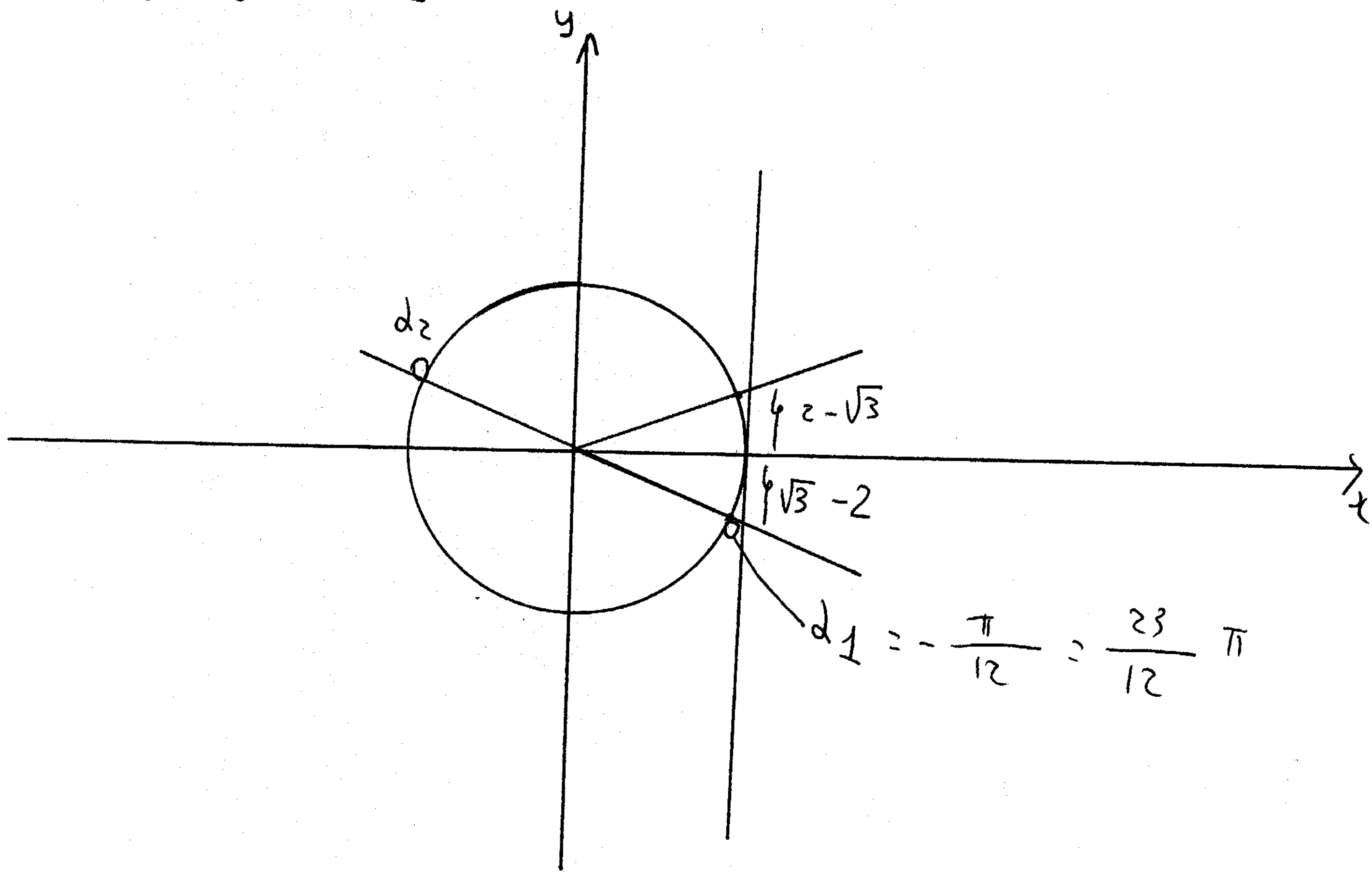
$$= \frac{2-\sqrt{3}}{3-4} = \frac{2-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}-2$$

cioè

$$t > \sqrt{3} - 2 \quad (6)$$



Nella nostra tabella dei valori della tangente non c'è il valore $\sqrt{3}-2$ ma c'è $2-\sqrt{3}$



$$tg\,\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3} \qquad tg\,15° = 2-\sqrt{3}$$

Risulta evidente che

$$tg\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3}-2 \quad ; \quad \alpha_1 = -\frac{\pi}{12} \qquad (7)$$

Descriviamo $\alpha_1 = -\frac{\pi}{12}$ in modo positivo

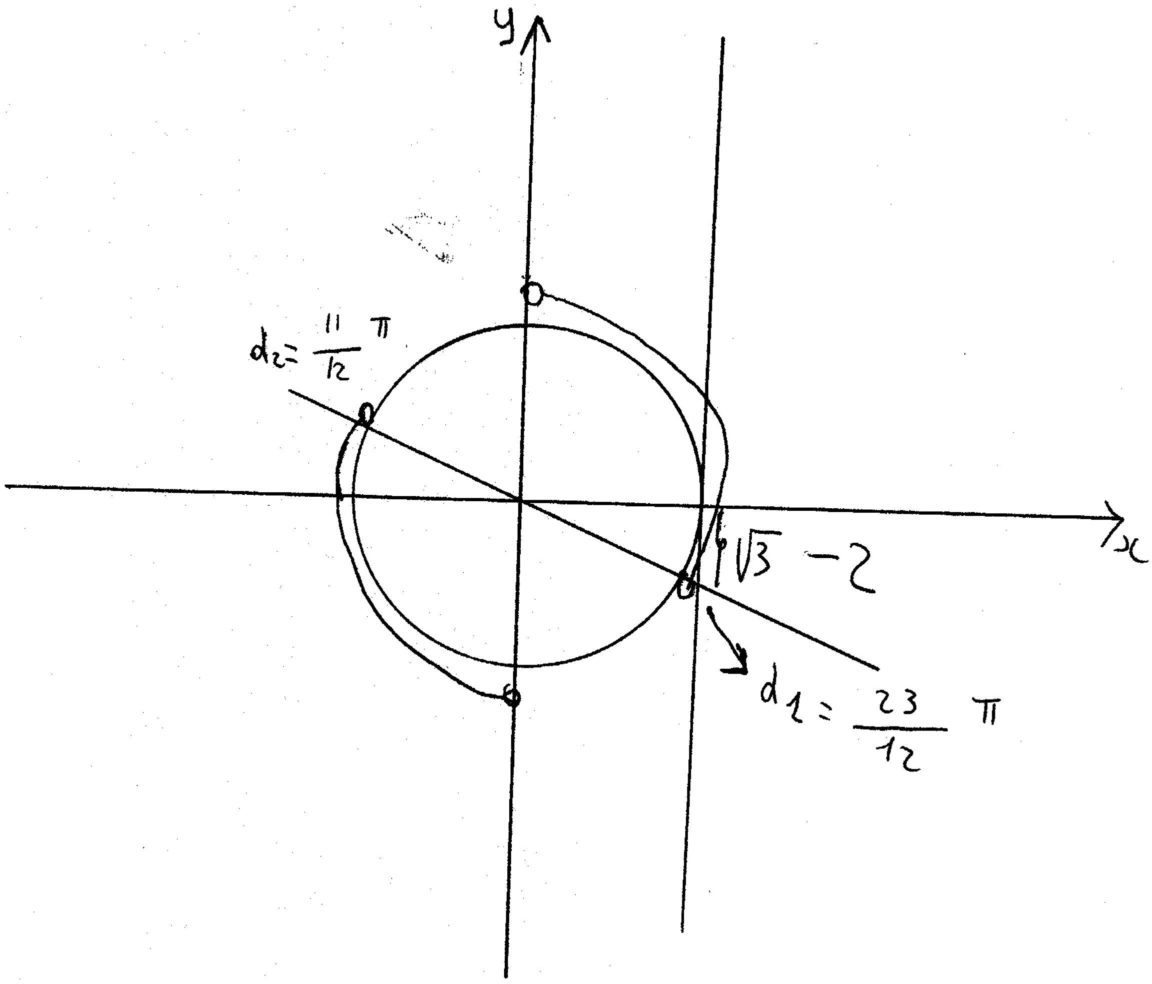
$$\alpha_1 = 2\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{24\pi-\pi}{12} = \frac{23}{12}\pi \qquad (8)$$

Per calcolare α_2, basta sottrarre π da $\frac{23}{12}\pi$

$$\alpha_2 = \frac{23}{12}\pi - \pi = \frac{23\pi-12\pi}{12} = \frac{11}{12}\pi \qquad (9)$$

andiamo alla ricerca dei valori tali che

$$t > \sqrt{3} - 2 \qquad (10)$$



dal grafico si ha che:

$$\frac{11}{12}\pi < \frac{y}{2} < \frac{3}{2}\pi \qquad (11)$$

con la periodicità

$$\frac{11}{12}\pi + k\pi < \frac{y}{2} < \frac{3}{2}\pi + k\pi \qquad (12)$$

Moltiplichiamo per 2

$$\frac{11}{6}\pi + k2\pi < y < 3\pi + 2k\pi \qquad (13)$$

ma $y = x + \frac{\pi}{6}$ (14)

$$\frac{11}{6}\pi + k2\pi < x + \frac{\pi}{6} < 3\pi + k2\pi \quad (15)$$

Sottraiamo $\frac{\pi}{6}$ al fine di isolare la x

$$\frac{11}{6}\pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi < x < 3\pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (16)$$

$$\frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{6}_{3}}\pi + k2\pi < x < \frac{18\pi - \pi}{6} + k2\pi \quad (17)$$

$$\boxed{\frac{5}{3}\pi + k2\pi < x < \frac{17}{6}\pi + k2\pi} \quad (18)$$

$\frac{17}{6}\pi$ è un angolo molto grande, facciamolo rientrare dentro l'intervallo $[0; 2\pi]$

$$\frac{17}{6}\pi - 2\pi = \frac{17\pi - 12\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi \quad (19)$$

di conseguenza la (18) diviene

$$\frac{5}{3}\pi + k2\pi < x < \frac{5}{6}\pi \quad (20)$$

La (20) è la soluzione

se vogliamo scrivere il primo estremo in forma negativa:

$\frac{5}{3}\pi$ equivale all'angolo $\frac{5}{3}\pi - 2\pi = \frac{5\pi - 6\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$

la (20) diviene

$$\boxed{-\frac{\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k2\pi} \quad (21)$$

Dobbiamo verificare se $y = \pi$ è soluzione

$\cos y + (\sqrt{3}+2)\,\text{sen}\, y + 1 > 0$

$\cos \pi + (\sqrt{3}+2)\,\text{sen}\,\pi + 1 > 0$

$-1 + (\sqrt{3}+2)\cdot 0 + 1 > 0$; $-1+1 > 0$ (falso)

da cui π non è soluzione.

In definitiva la soluzione dell'esercizio è

$$-\frac{\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k2\pi$$