Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

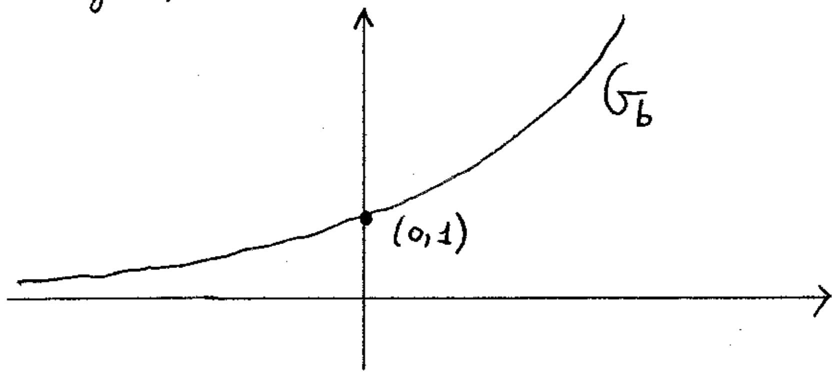
Tema di: MATEMATICA

PROBLEMA 2

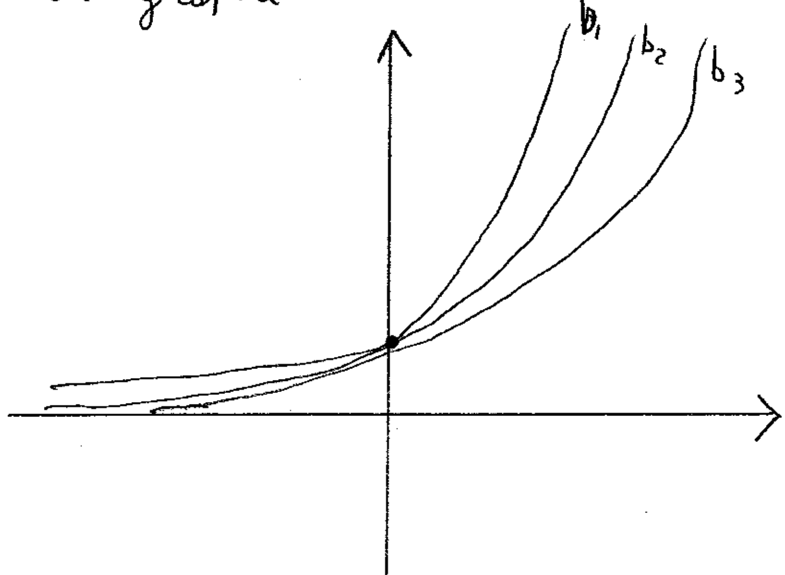
Nel piano, riferito a coordinate cartesiane Oxy, si consideri la funzione f definita da $f(x) = b^x$ $(b > 0,\ b \neq 1)$.

1. Sia G_b il grafico di $f(x)$ relativo ad un assegnato valore di b. Si illustri come varia G_b al variare di b.
2. Sia P un punto di G_b . La tangente a G_b in P e la parallela per P all'asse y intersecano l'asse x rispettivamente in A e in B. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Per quali valori di b la lunghezza di AB è uguale a 1?
3. Sia r la retta passante per O tangente a G_e (e = numero di *Nepero*). Quale è la misura in radianti dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?
4. Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata dall'asse y, da G_e e dalla retta d'equazione $y = e$.

La funzione $y = b^x$ con $b > 0$ e $b \neq 1$ è la funzione esponenziale di base b, che come noto ha grafico

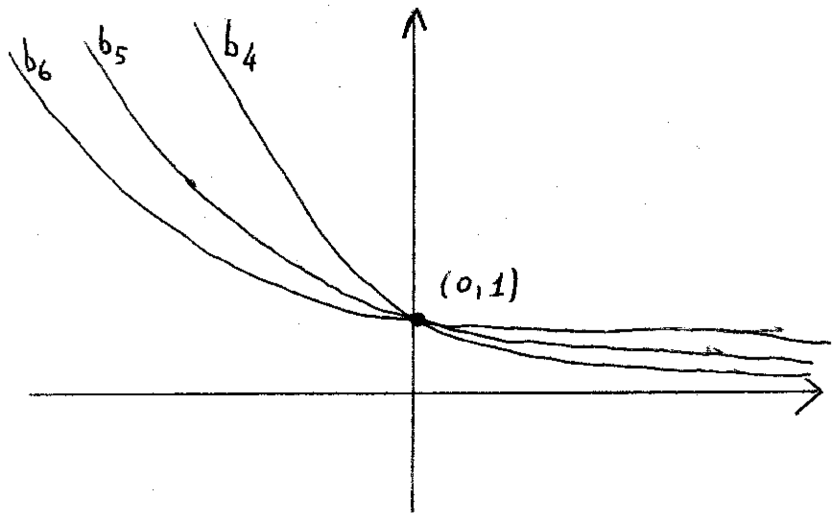


Chiamiamo G_b il grafico della funzione esponenziale di base b, con $b > 0$ e $b \neq 1$
Se la base b varia si ottengono le seguenti famiglie di grafici



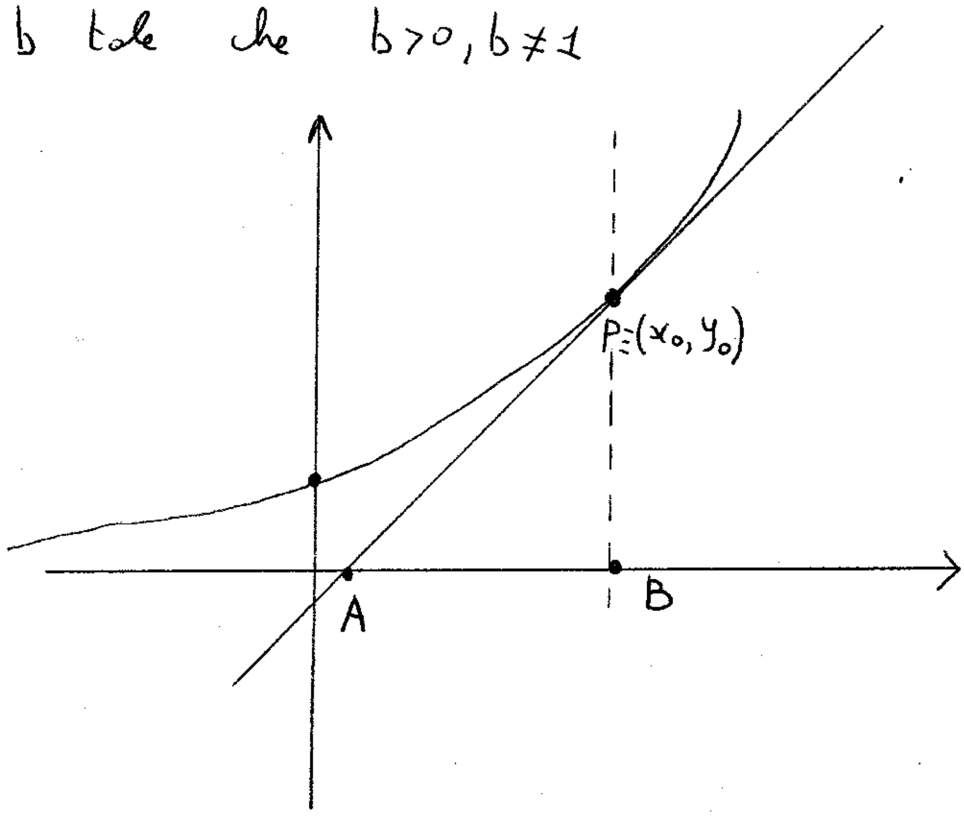
con $b_1, b_2, b_3 > 0$

mentre se la base b è < 0 si ha



con $b_4, b_5, b_6 < 0$

$\boxed{2}$ Consideriamo un qualsiasi valore b, ad esempio un b tale che $b > 0, b \neq 1$



L'equazione della tangente alla curva γ che ha legge di definizione $y = f(x)$ nel punto $P \equiv (x_0, y_0)$ con $P \in \gamma$ è

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (1)$$

Visto che la nostra funzione è

$$y = b^x$$

$$f'(x) = y'(x) = \left[b^x\right]' = b^x \cdot Ln(b) \quad (2)$$

dove Ln è il logaritmo naturale, $Ln(b) \overset{def.}{=} \lg_e b$, con e "numero di Nepero", $e \cong 2,71$

Da (2) si ha che $y'(x_0) = f'(x_0) = b^{x_0} \cdot Ln(b)$ (3)

Da (3) si evince che il coefficiente angolare della tangente t_1 alla curva $y = b^x$ nel generico punto $P \equiv (x_0, y_0)$ è

$$m = y'(x_0) = b^{x_0} \cdot Ln(b) \quad (3)$$

Inseriamo (3) in (1)

$$y - y_0 = b^{x_0} \cdot Ln(b) \cdot (x - x_0) \qquad (4)$$

Visto che $y = b^{x}$ implica che $y_0 = b^{x_0}$ da cui

$$y - b^{x_0} = b^{x_0} \cdot Ln(b) \cdot (x - x_0) \qquad (5)$$

La (5) rappresenta l'equazione della tangente t_1 nel punto $P \equiv (x_0, y_0)$. Scriviamola in forma esplicita

$$y = b^{x_0} + b^{x_0} \cdot Ln(b) \cdot x - b^{x_0} \cdot Ln(b) \cdot x_0$$

$$y = b^{x_0} \cdot Ln(b) \cdot x + \left(b^{x_0} - b^{x_0} \cdot Ln(b) \cdot x_0\right) \qquad (6)$$

$$m = b^{x_0} \cdot Ln(b) \quad ; \quad q = b^{x_0} - b^{x_0} \cdot Ln(b) \cdot x_0$$

coefficiente angolare — intercetta

$$y = mx + q$$

Il punto A rappresenta l'intersezione tra la tangente t_1 e l'asse delle ascisse

$$A \equiv \begin{cases} \text{equazione di } t_1 \\ \text{equazione dell'asse } x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = b^{x_0} \cdot \ln(b) \cdot x + \left(b^{x_0} - b^{x_0} \cdot \ln(b) \cdot x_0\right) \\ y = 0 \end{cases}$$

$$0 = b^{x_0} \cdot \ln(b) \cdot x + \left(b^{x_0} - b^{x_0} \cdot \ln(b) \cdot x_0\right)$$

l'incognita è x, ricaviamola

$$-b^{x_0} \cdot \ln(b) \cdot x = b^{x_0} - b^{x_0} \cdot \ln(b) \cdot x_0$$

dividiamo tutte le quantità per b^{x_0}

$$-\ln(b) \cdot x = 1 - \ln(b) \cdot x_0$$

$$\ln(b) \cdot x = -1 + \ln(b) \cdot x_0$$

$$x = \frac{-1}{\ln(b)} + \frac{\cancel{\ln(b)} \cdot x_0}{\cancel{\ln(b)}}$$

$$x = x_0 - \frac{1}{\ln(b)}$$

il punto A ha coordinate $A \equiv \left(x_0 - \frac{1}{Ln(b)} ; 0\right)$

L'equazione della retta parallela all'asse Y e passante per il punto $P \equiv (x_0, y_0)$, ovviamente ha equazione $X = X_0$. Da cui il punto B ha coordinate $B \equiv (x_0, 0)$

Per calcolare la lunghezza del segmento $\overline{AB}$ ci ricordiamo che $\overline{AB} \subset$ Asse X quindi la sua lunghezza la otteniamo come valore assoluto della differenza delle ascisse

$$\overline{AB} = |X_B - X_A| = \left| x_0 - \left(x_0 - \frac{1}{Ln(b)}\right)\right| =$$

$$= \left|\cancel{x_0} - \cancel{x_0} + \frac{1}{Ln(b)}\right| = \left|\frac{1}{Ln(b)}\right| \quad \text{cioè}$$

$$\overline{AB} = \left|\frac{1}{Ln(b)}\right| \quad (7)$$

Il secondo membro delle (7) non contiene alcuna quantità che coinvolge la posizione del punto A o del punto B; ne consegue che il segmento $\overline{AB}$ ha lunghezza costante e vale $\left|\frac{1}{Ln(b)}\right|$

Se la base della funzione $y = b^x$ è il "numero di Nepero e" si ha

$$y = e^x \quad e \quad \overline{AB} = \left|\frac{1}{Ln\, e}\right| = \left|\frac{1}{1}\right| = 1$$

$$\overline{AB} = 1.$$

3 Il quesito $\boxed{3}$ non studia la generica $y = b^x$

con grafico G_b, ma studia la funzione $y = e^x$ di grafico G_e

In precedenza abbiamo trovato l'equazione della tangente t_1 alla generica funzione $y = b^x$

nel punto $P \equiv (x_0, y_0)$ e tale equazione era la (6)

$$y = b^{x_0} \cdot L_n(b) \cdot x + (b^{x_0} - b^{x_0} \cdot L_n(b) \cdot x_0) \quad (6)$$

se la funzione è $y = e^{x}$ si osserva che

$$1)\ b^{x_0} = e^{x_0}$$
$$2)\ L_n(b) = L_n(e) = 1$$

di conseguenza la (6) si specializza nella

$$y = e^{x_0} \cdot 1 \cdot x + e^{x_0} - e^{x_0} \cdot 1 \cdot x_0$$

$$y = e^{x_0} \cdot x + (e^{x_0} - e^{x_0} \cdot x_0) \quad (8)$$

La (8) rappresenta l'equazione della tangente alla curva $y = e^{x}$ nel punto P di coordinate $P \equiv (x_0, y_0)$

se tra tali tangenti ottenibili al variare di P cerchiamo quella che passa per l'origine, uguagliamo a Ø l'intercetta

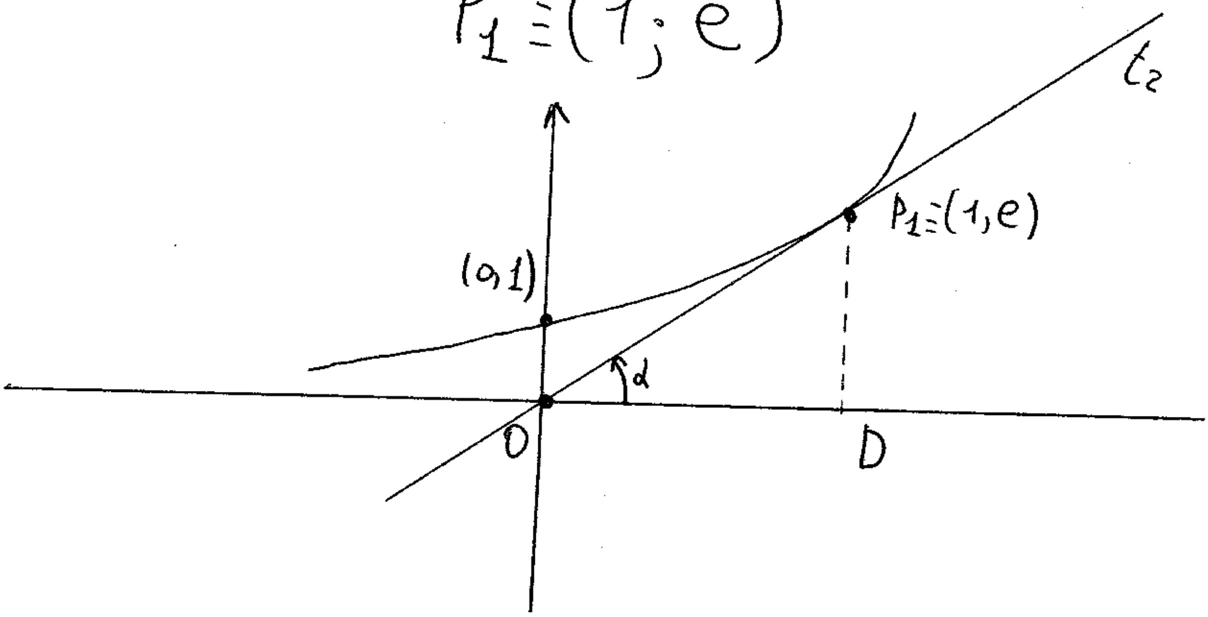
$$0 = e^{x_0} - e^{x_0} \cdot x_0$$

$$\cancel{e^{x_0}} \cdot x_0 = \cancel{e^{x_0}}\, 1$$

$$\boxed{x_0 = 1}$$

se $x_0 = 1$ e la funzione è $y = e^x$, implica che $y_0 = e^1 = e$ e che il punto P che ha tangente passante per l'origine è il punto

$$P_1 \equiv (1; e)$$



$$t_2 : y = ex$$

il triangolo ODP_1 è rettangolo quindi possiamo applicare i teoremi di goniometria sui triangoli rettangoli

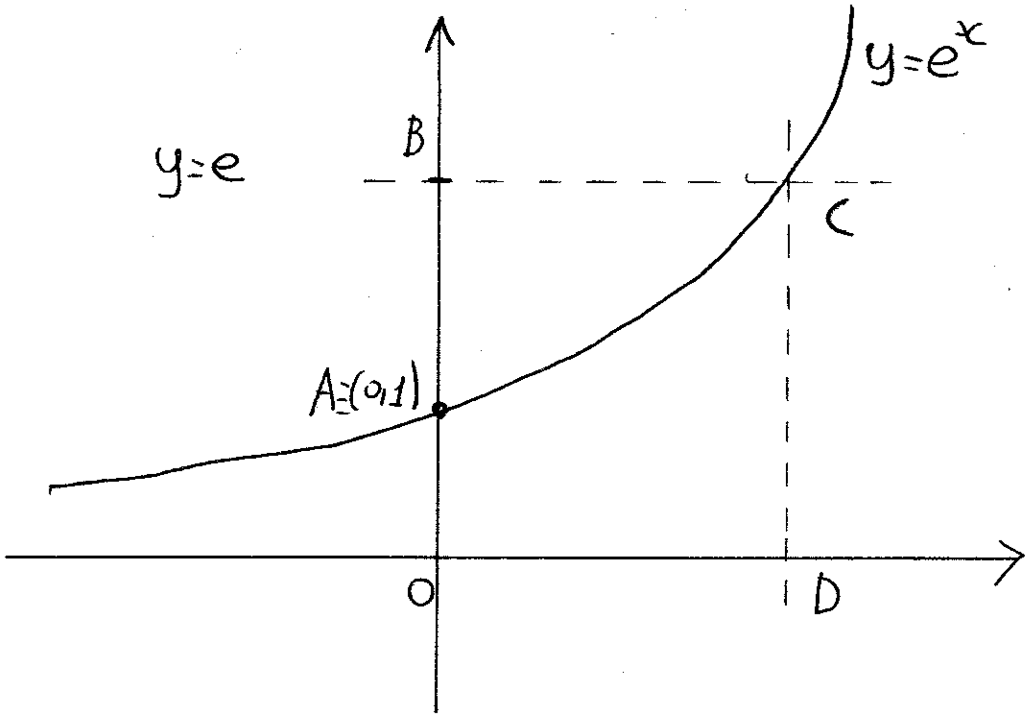
$$\overline{P_1D} = \overline{OD} \cdot tg\,\alpha$$

$$tg\,\alpha = \frac{\overline{P_1D}}{\overline{OD}} = \frac{e}{1} = e$$

$tg\,\alpha = e$ da cui

$\alpha = arctg\, e$; $\alpha = arctg\, 2{,}71$

4



$e \cong 2,71$

Calcoliamo le coordinate del punto C

$$C \equiv \begin{cases} \text{equazione della curva} \\ \text{equazione della retta } y=e \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=e^x \\ y=e \end{cases} \qquad e^x = e \Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$C \equiv (1; e)$$

Noi dobbiamo calcolare l'area della figura ABC

Ricordiamo che:

$\overline{OD}$ = ascissa di $C = 1$

$\overline{OB}$ = ordinata di $C = e$

L'area del rettangolo OBCD vale

$$A_{OBCD} = \overline{OD} \cdot \overline{OB} = 1 \cdot e = e$$

Calcoliamo l'area della figura OACD cioè l'area della figura sottesa dalla curva $y = e^x$ da $x = 0$ a $x = 1$

$$A_{OACD} = \int_0^1 e^x \, dx = \left[e^x \right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

Di conseguenza l'area ABC cercata è

$$A_{ABC} = A_{OBCD} - A_{OACD} = e - (e-1) = e - e + 1 = 1$$

$$A_{ABC} = 1$$

:)