La Parabola

Sintesi delle formule e esercizi svolti

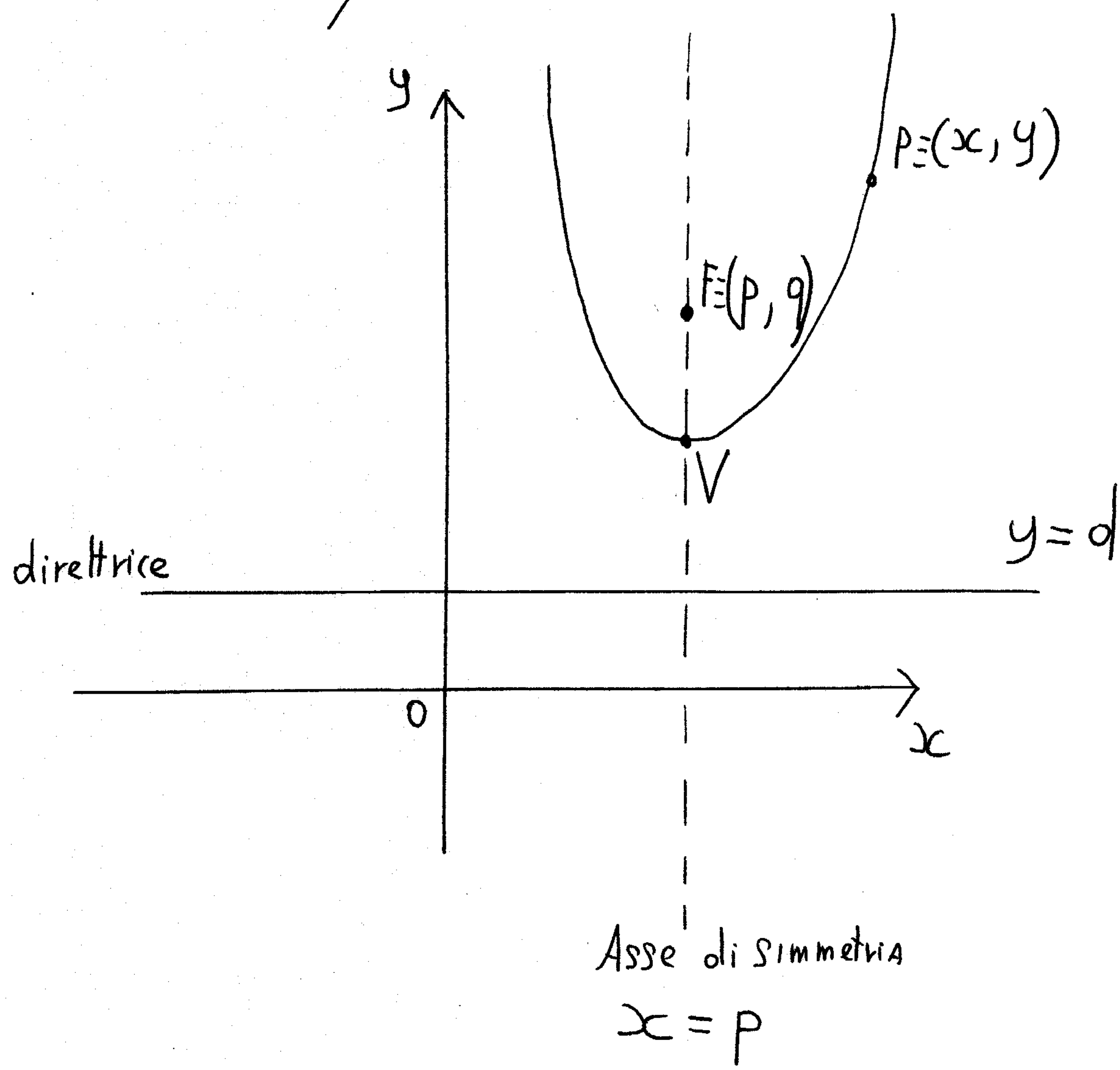
Prof. Francesco Zumbo

sito web: www.francescozumbo.it

email: zumbo2008@yahoo.it

Sintesi Formule della Parabola

1° Tipo: Parabola con asse di simmetria parallelo all'asse Y.



$F \equiv (p; q)$

direttrice: $y = d$

equazione $$y = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

con

$$a = \frac{1}{2(q-d)}; \quad b = -\frac{p}{q-d}; \quad c = \frac{p^2+q^2-d^2}{2(q-d)} \qquad (2)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Dall'equazione al grafico:

$$p = -\frac{b}{2a}; \quad q = \frac{1-\Delta}{4a}; \quad d = -\frac{1+\Delta}{4a} \qquad (3)$$

$$F \equiv \left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right) \qquad \text{(fuoco)} \qquad (4)$$

equazione della direttrice: $$y = -\frac{1+\Delta}{4a} \qquad (5)$$

equazione asse di simmetria

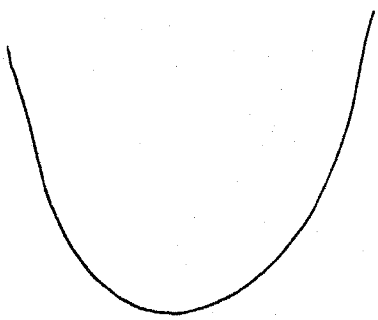
$$x = -\frac{b}{2a} \qquad (6)$$

Il Vertice V è il punto di intersezione tra la parabola γ e l'asse di simmetria

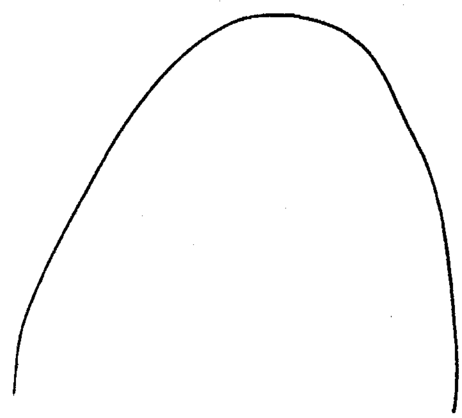
$$V = \gamma \cap \text{Asse di simmetria}$$

$$V \equiv \left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a} \right) \qquad (7)$$

se $a > 0$



se $a < 0$

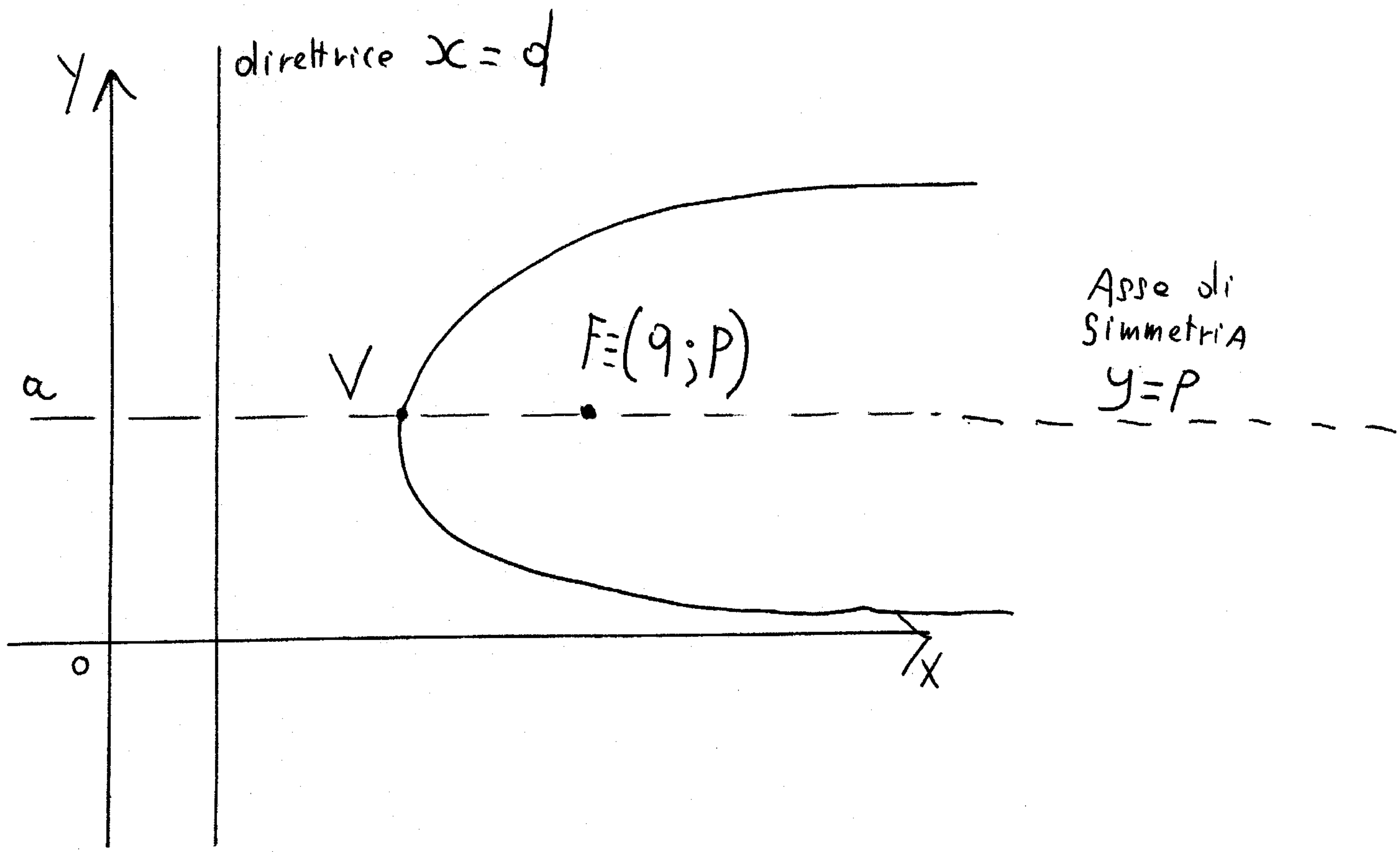


2° Tipo: Parabola con Asse di simmetria parallelo all'asse x.

Al fine di utilizzare le formule (2) si pone

$$F \equiv (q\,;\,p)$$

cioè si invertono l'ascissa con l'ordinata del fuoco rispetto all'ipotesi utilizzata nelle parabole del 1° tipo.



equazione del secondo tipo della parabola

$$x = ay^2 + by + c \qquad (8)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$a = \frac{1}{2(q-d)} \; ; \; b = -\frac{p}{q-d} \; ; \; c = \frac{p^2+q^2-d^2}{2(q-d)} \qquad (9)$$

$$F \equiv \left(\underbrace{\frac{1-\Delta}{4a}}_{q} \; ; \; \underbrace{-\frac{b}{2a}}_{p} \right) \qquad (10)$$

$$q = \frac{1-\Delta}{4a} \; ; \; p = -\frac{b}{2a} \; ; \; d = -\frac{1+\Delta}{4a} \qquad (11)$$

Asse di simmetria:

$$a : \; y = p \qquad \text{cioè} \qquad y = -\frac{b}{2a}$$

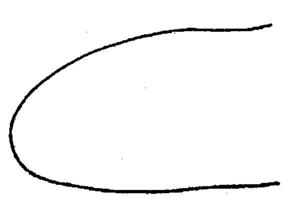
Equazione della direttrice

$$\boxed{d : \; x = -\frac{1+\Delta}{4a}}$$

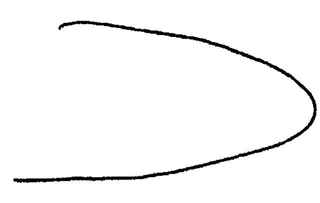
Vertice:

$$\boxed{V \equiv \left(-\frac{\Delta}{4a} \; ; \; -\frac{b}{2a} \right)}$$

se $a > 0$



se $a < 0$



Esercizi sulla Parabola

PARABOLA

Esercizio

Determinare l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y, passante per il punto $P_1(-3;2)$ e tangente alla retta $4x-y+2=0$ nel punto $P_2(-1;-2)$. Tracciare i grafici. Calcolare il vertice, il fuoco, la direttrice, l'asse di simmetria.

Sviluppiamo le condizioni cui deve soddisfare la parabola γ

1^a il punto $P_1(-3;2) \in \gamma$ quindi le coordinate soddisfano l'equazione di γ $\quad y=ax^2+bx+c$

da cui $\quad 2=a\cdot(-3)^2+b(-3)+c;$

$2=9a-3b+c; \quad 0=9a-3b+c-2;$ cioè

(1) $\quad \boxed{9a-3b+c-2=0}$ 1^a condizione.

Il punto $P_2(-1;-2) \in \gamma$ quindi anche le sue coordinate devono verificare l'equazione della parabola. Per cui: ②

$$-2 = a(-1)^2 + b(-1) + c \; ; \; -2 = a - b + c \; ;$$

$\boxed{a - b + c + 2 = 0}$ 2^a condizione (2)

La terza condizione la ricaviamo dalla condizione di tangenza, sapendo che $y = ax^2 + bx + c$ e la retta $4x - y + 2 = 0$ sono tangenti. Per cui mettendole a sistema deve essere verificata la condizione $\Delta = 0$ che esprime proprio la condizione di tangenza.

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ 4x - y + 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ -y = -4x - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 4x + 2 \end{cases}$$

lo risolviamo per confronto

$$4x + 2 = ax^2 + bx + c \; ; \; 0 = -4x - 2 + ax^2 + bx + c \; ;$$

$$ax^2 + bx + c - 4x - 2 = 0 \; ; \; ax^2 + x(b-4) + (c-2) = 0$$

$$\Delta = (b-4)^2 - 4(a)(c-2) = b^2 + 16 - 8b - 4a(c-2) =$$

$$= b^2 + 16 - 8b - 4ac + 8a$$

Tale Δ, affinché la retta $4x-y+2=0$ e la parabola $y=ax^2+bx+c$ siano tangenti, deve essere uguale a 0. $\Delta=0$

$$\boxed{b^2-8b+8a-4ac+16=0} \quad 3^a \text{ condizione} \quad (3)$$

A questo punto risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 9a-3b+c-2=0 & (1) \\ a-b+c+2=0 & (2) \\ b^2-8b+8a-4ac+16=0 & (3) \end{cases}$$

Ricaviamo la c dalla (2):

$$c=-a+b-2$$

e la sostituiamo nelle altre c delle altre equazioni

$$\begin{cases} 9a-3b+(-a+b-2)-2=0 \\ c=-a+b-2 \\ b^2-8b+8a-4a(-a+b-2)+16=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a - 3b - a + b - 2 - 2 = 0 \\ c = -a + b - 2 \\ b^2 - 8b + 8a + 4a^2 - 4ab + 8a + 16 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8a - 2b - 4 = 0 & (4) \\ \sim & (5) \\ b^2 - 8b + 16a + 4a^2 - 4ab + 16 = 0 & (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a - b - 2 = 0 & (4) \\ c = -a + b - 2 & (5) \\ b^2 - 8b + 16a + 4a^2 - 4ab + 16 = 0 & (6) \end{cases}$$

Ricaviamo b dalla (4)

$$\begin{cases} -b = -4a + 2 \\ c = \sim \\ \sim \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 4a - 2 \\ c = \sim \\ \sim \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 4a - 2 \\ c = -a + (4a - 2) - 2 \\ (4a-2)^2 - 8(4a-2) + 16a + 4a^2 - 4a(4a-2) + 16 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 4a - 2 \\ c = -a + 4a - 2 - 2 \\ 16a^2 + 4 - 16a - 32a + 16 + 16a + 4a^2 - 16a^2 + 8a + 16 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 4a - 2 \\ c = 3a - 4 \\ 4a^2 - 24a + 36 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 4a - 2 & (7) \\ c = 3a - 4 & (8) \\ a^2 - 6a + 9 = 0 & (9) \end{cases}$$

Risolviamo la (9)

$$a = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (1) \cdot (9)}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3$$

$$a = 3 \quad (10)$$

La (10) nella (7) $\Rightarrow$

$$b = 4 \cdot 3 - 2 = 12 - 2 = 10 \; ; \quad b = 10 \quad (11)$$

La (10) nella (8) $c = 3 \cdot 3 - 4$; $c = 5$ (12)

Da questi calcoli si evince che la parabola cercata è

$$\boxed{y = 3x^2 + 10x + 5} \quad (13)$$

Calcoliamo il Vertice

$$V\left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{6}_{3}} = -\frac{5}{3}$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{100-4(3)(5)}{4\cdot 3} = -\frac{100-60}{12} =$$

$$= -\frac{\cancel{40}^{\cancel{20}\,10}}{\cancel{12}_{\cancel{6}\,3}} = -\frac{10}{3}$$

$$V\left(-\frac{5}{3} ; -\frac{10}{3}\right)$$

Calcoliamo l'asse di simmetria

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$x = -\frac{5}{3}$$ Asse di simmetria

Calcoliamo la direttrice

$$y = -\frac{1+\Delta}{4a}$$ cioè

$$y = -\frac{10}{3}$$

Calcoliamo il fuoco

$$F\left(-\frac{b}{2a} ; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$$

$$F\left(-\frac{5}{3} ; \frac{1-(100-4\cdot3\cdot5)}{4\cdot3}\right.$$

$$F\left(-\frac{5}{3};\frac{1-(100-60)}{12}\right)$$

$$F\left(-\frac{5}{3};\frac{1-40}{12}\right);\ F\left(-\frac{5}{3};\frac{-39}{12}\right)$$

$$F\left(-\frac{5}{3};-\frac{13}{4}\right)$$

A questo punto ci manca soltanto di capire l'ampiezza dell'apertura della parabola. A tale scopo calcoliamo l'intersezione con la retta

$$y=5$$

$$\begin{cases} y=3x^2+10x+5 \\ y=5 \end{cases}$$

$3x^2+10x+5=5$; $3x^2+10x+5-5=0$;

$3x^2+10x=0$; $x(3x+10)=0$; $x=0$

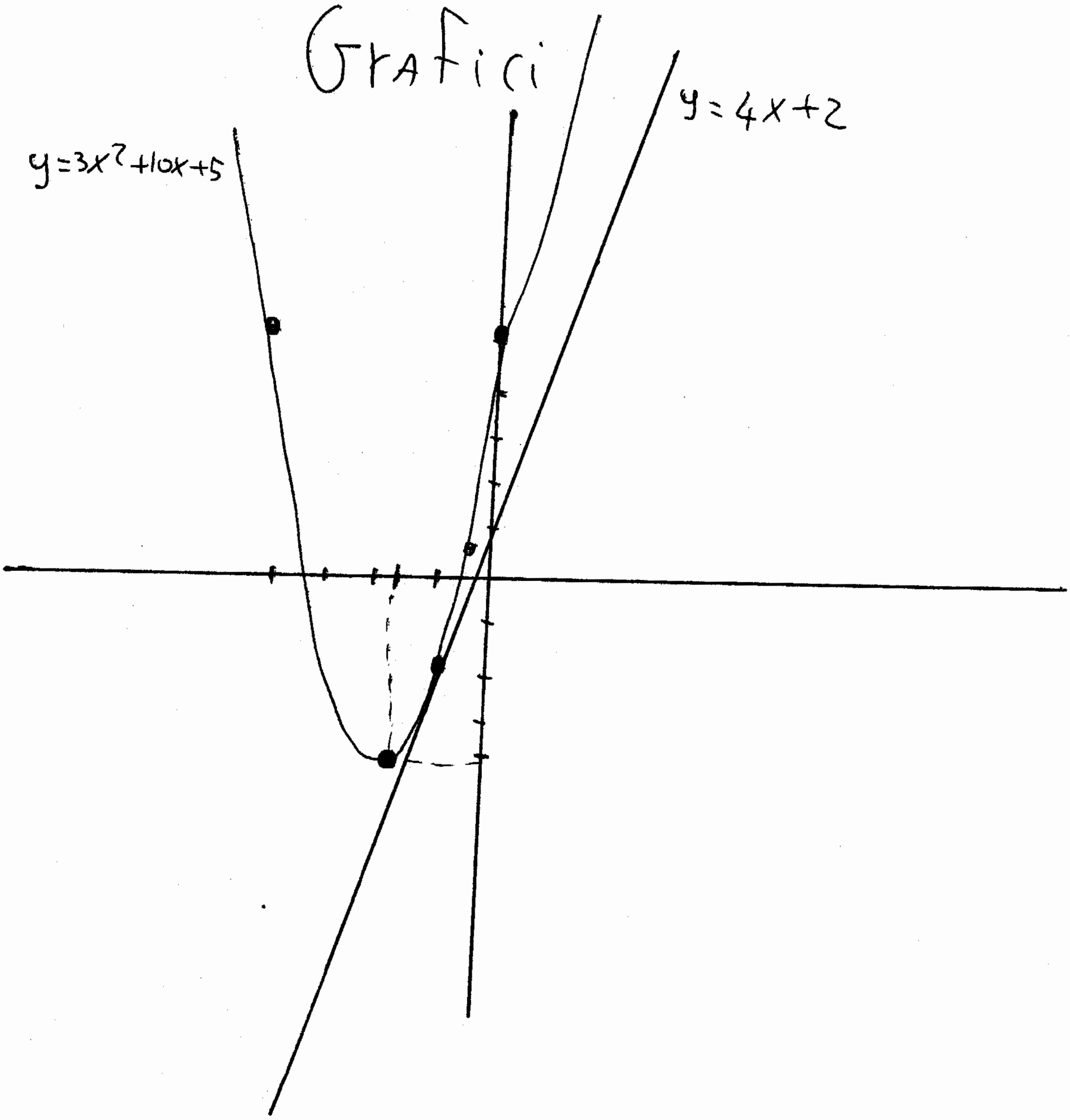
$3x+10=0$; $3x=-10$; $x=-\frac{10}{3}$

La parabola quindi passa per i punti

$$P_3(0\,;5) \quad e \quad P_4\left(-\frac{10}{3}\,;5\right)$$

9

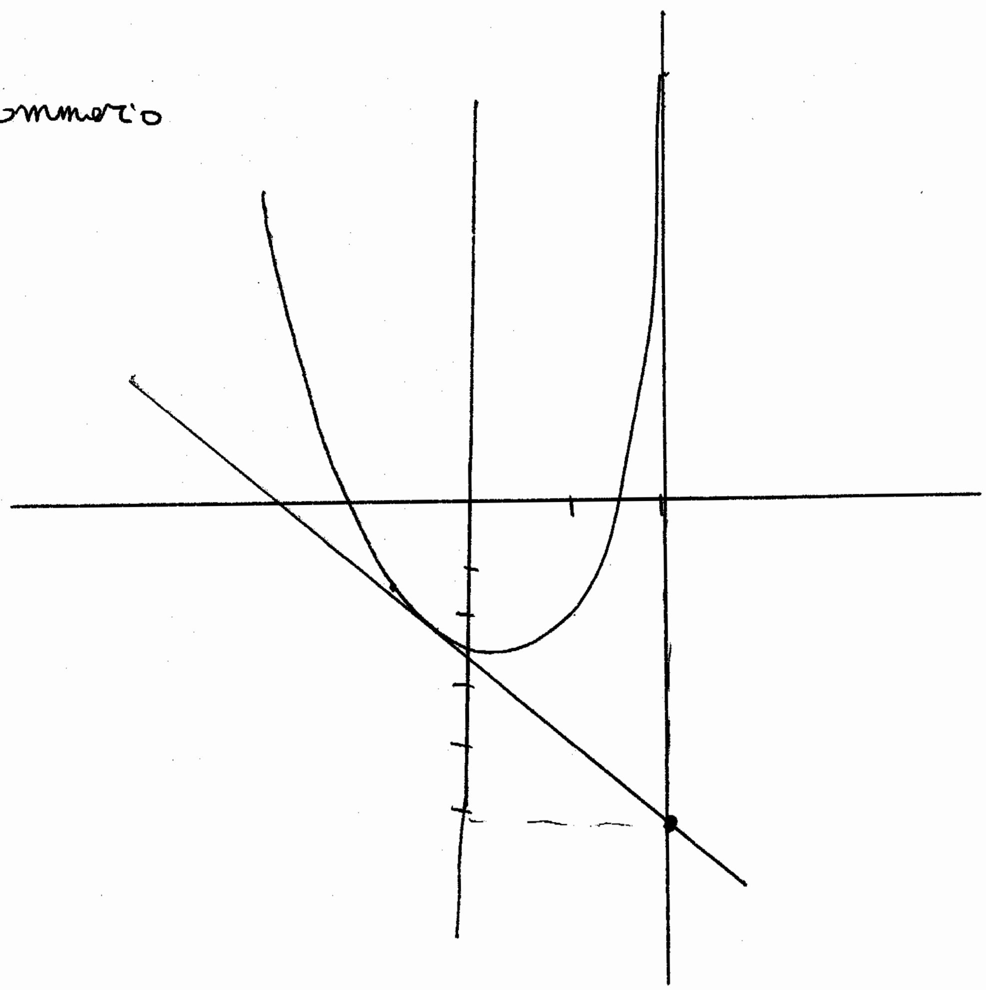
Grafici



Esercizio

Data la parabola $y = x^2 - 4x + 3$ determinare le equazioni delle tangenti ad essa passanti per il punto $C(2; -5)$

Grafico sommario



L'equazione del fascio proprio di rette passanti per $C(2; -5)$ è

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y + 5 = m(x - 2)$$

$$y = mx - 2m - 5$$

Studiamo il sistema tra il fascio proprio di rette passanti per C e la parabola

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ mx - 2m - 5 = y \end{cases}$$

Per confronto si ha:

$$x^2 - 4x + 3 = mx - 2m - 5; \quad x^2 - 4x + 3 - mx + 2m + 5 = 0$$

$$x^2 + x(-4 - m) + (8 + 2m) = 0$$

$$x^2 - x(4+m) + (8+2m) = 0$$

La condizione di tangenza si esprime con il $\Delta = 0$

$$(4+m)^2 - 4(1)(8+2m) = 0$$

$$(4+m)^2-4(1)(8+2m)=0$$

$16+m^2+\cancel{8m}-32-\cancel{8m}=0$; $m^2-16=0$; $m^2=16$;

$m=\pm 4$; $m_1=4$ $m_2=-4$

La 1ª tangente é

$y=4x-2\cdot 4-5$; $y=4x-8-5$; $\boxed{y=4x-13}$

La 2ª tangente é

$y=-4x-2(-4)-5$; $y=-4x+8-5$

$\boxed{y=-4x+3}$

Disegniamo la parabola:

Il vertice ha coordinate: $V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

$$V\left(-\frac{-4}{2}; -\frac{16-4\cdot 1\cdot 3}{4}\right)$$

$$V\left(2; -\frac{16-12}{4}\right); \quad V\left(2; -\frac{4}{4}\right); \quad \boxed{V(2;-1)}$$

Per capire l'ampiezza dell'apertura intersechiamo la parabola con la retta $y=3$

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 3; \quad x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0; \quad x = 0 \quad x - 4 = 0; \quad x = 4$$

$P_1(0;3)$ e $P_2(4;3)$