

L'iperbole

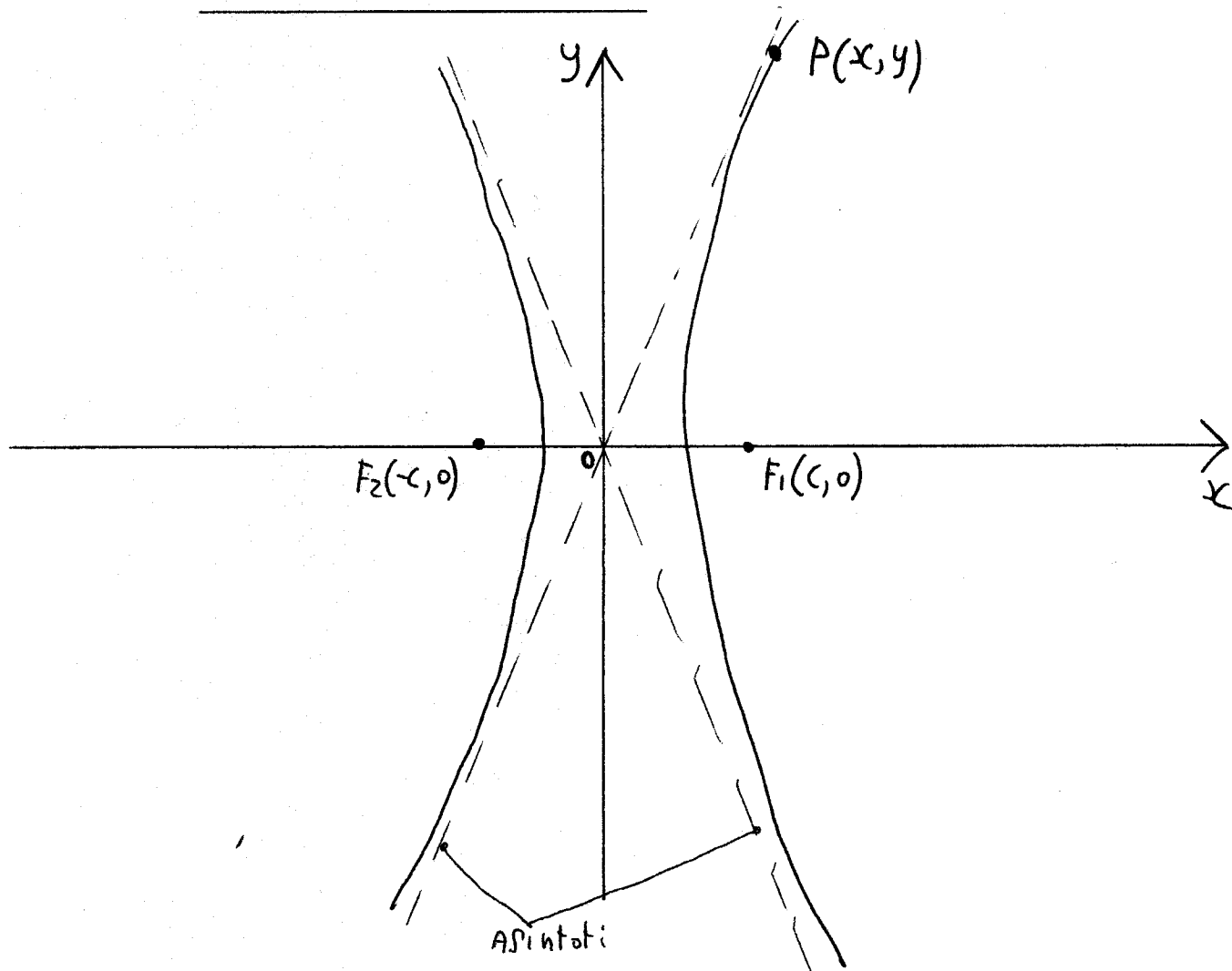
①

Definizione: Siano F_1 e F_2 due punti fissi di un piano. Si definisce iperbole l'insieme dei punti (il luogo geometrico dei punti) per i quali è costante la differenza delle distanze da F_1 e F_2 .

$$\gamma = \{ P \in \pi(\text{piano}) : |PF_1 - PF_2| = 2a \text{ con } a \in \mathbb{R}_0^+ \}$$

1° Tipo

Iperbole con fuochi appartenenti all'asse X.



(2)

$$(1) \quad |PF_1 - PF_2| = 2a \quad \text{con } a \in \mathbb{R}_0^+$$

L'equazione è:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

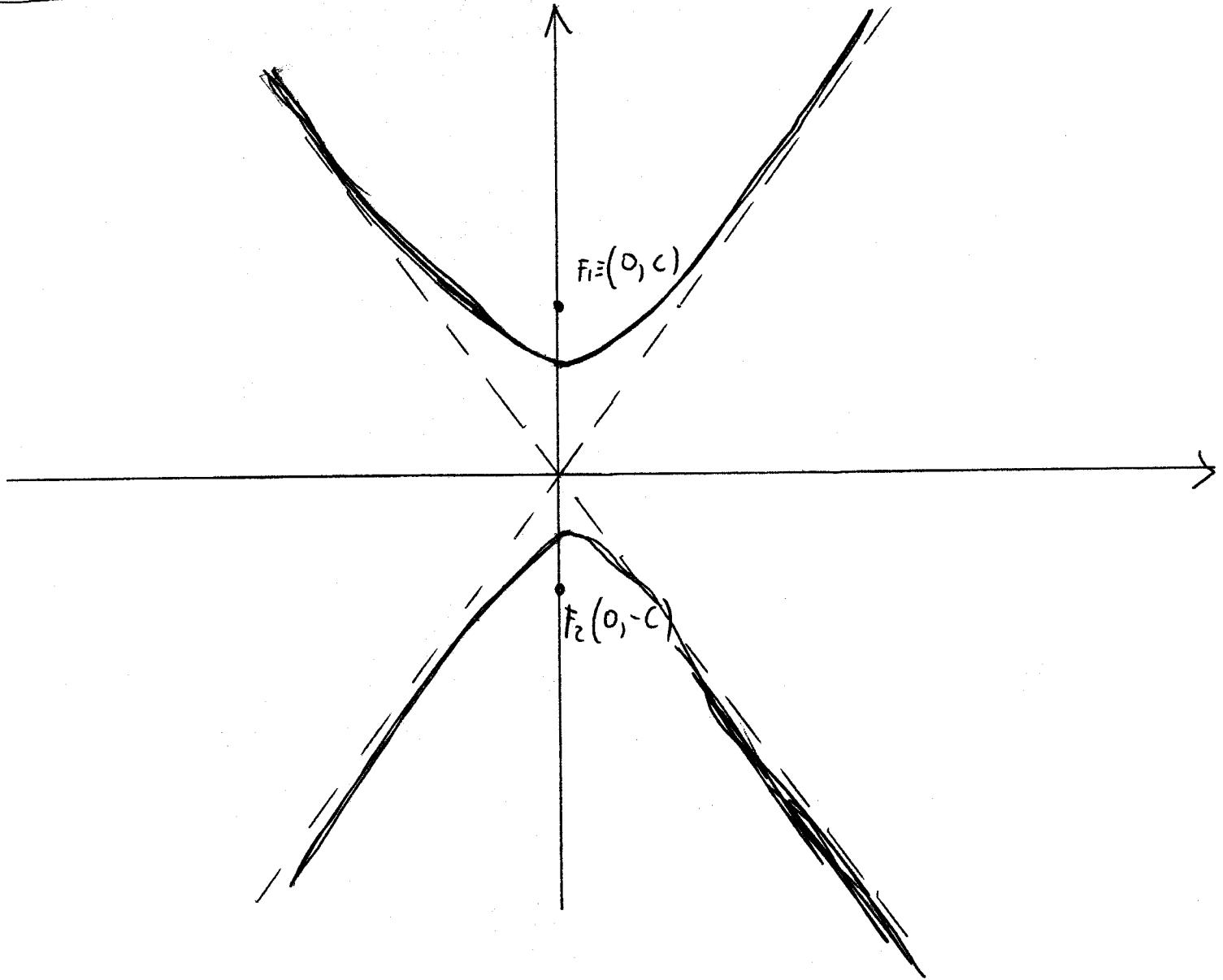
con la sostituzione:

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad (3)$$

Eccentricità dell'ipercbole con fuochi
in X .

$$e = \frac{c}{a} \quad (4)$$

2° Tipo Iperbole con fuochi $\in Y$



L'equazione è
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (5)$$

avendo posto $|PF_1 - PF_2| = 2b \quad (6)$

con $b \in \mathbb{R}^+$

Con la sostituzione

$$a^2 = c^2 - b^2 \quad (7)$$

Eccentricità dell'iperbole con fuochi
su Y

$$e = \frac{c}{b} \quad (8)$$

Intersezione dell'iperbole con gli assi.

1° Tipo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$F_1, F_2 \in X$$

eq. Y

eq. Asse X ($y=0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y=0 \end{array} \right.$$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 ;$$

$$x^2 = a^2 ; \quad x = \pm a$$

le intersezioni sono

$P_1(a; 0)$ e $P_2(-a; 0)$ e si chiamano Vertici

2° Tipo $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ con $F_1, F_2 \in \mathcal{V}$

(5)

$$\left| \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \\ x=0 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} -\frac{y^2}{b^2} = -1 \\ x=0 \end{array} \right|$$

$$; \frac{y^2}{b^2} = 1 ;$$

$$y^2 = b^2 ; y = \pm b$$

Le intersezioni sono

$$P_1(0; b) \text{ e } P_2(0; -b)$$

e si chiamano Vertici

Da qui si evince che le quantità a e b non sono dei semplici numeri ma hanno un importante significato geometrico.

L'asse che contiene i fuochi lo si definisce Asse Trasverso, l'altro asse si chiama Asse non Trasverso.

Asintoti

⑥

Definizione: Una retta è asintoto ad una curva illimitata se è tangente alla curva nei punti all'infinito della curva.

Prendiamo in considerazione il primo tipo di iperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

Metteremo al sistema l'iperbole con il fascio proprio di rette passanti per l'origine ($y = mx$) e successivamente imporranno la condizione di tangenza $\Delta = 0$, per poi ricavare i coefficienti angolari degli asintoti.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{m^2 x^2}{b^2} = 1$$

(7)

$$\frac{b^2 x^2 - a^2 m^2 x^2}{\cancel{a^2 b^2}} = \frac{\cancel{a^2 b^2}}{\cancel{a^2 b^2}}$$

$$b^2 x^2 - a^2 m^2 x^2 = a^2 b^2 ; x^2 (b^2 - a^2 m^2) = a^2 b^2$$

$$(b^2 - a^2 m^2) x^2 - a^2 b^2 = 0$$

Imponiamo $\Delta = 0$

$$\Delta = 0 - 4(b^2 - a^2 m^2)(-a^2 b^2) = 0$$

$$4(b^2 - a^2 m^2)(a^2 b^2) = 0$$

da questo punto in poi la nostra incognita è il coefficiente angolare m

$$(4b^2 - 4a^2 m^2)(a^2 b^2) = 0 ; \cancel{4a^2 b^4} - \cancel{4a^2 b^2} m^2 = 0$$

$$a^2 b^4 = a^2 b^2 m^2 ; m^2 = \frac{a^2 b^4}{a^2 b^2} ; m^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

$$m = \pm \frac{b}{a}$$

Gli asintoti sono

$$1^{\circ} \quad y = \frac{b}{a} x \quad (9)$$

$$2^{\circ} \quad y = -\frac{b}{a} x \quad (10)$$

Analogamente si dimostra che gli asintoti dell'ipercatole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

sono sempre:

$$1^{\circ} \quad y = \frac{b}{a} x \quad (11)$$

$$2^{\circ} \quad y = -\frac{b}{a} x \quad (12)$$

Iperbole Equilatera

Definizione: Una iperbole è equilatera se $a=b$

Dal 1° Tipo di iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ si

ottiene $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$; $x^2 - y^2 = a^2$

Quindi chiameremo 3° Tipo di Iperbole

L'iperbole equilatera con asse trasverso l'asse

X. E ha equazione

(13)

$$x^2 - y^2 = a^2$$

3° Tipo

dovendo essere $a=b \Rightarrow$ gli asintoti

hanno equazione

$$1^{\circ} \quad y = x$$

$$2^{\circ} \quad y = -x$$

che sono le bisettrici del 1° e 3° quadrante
e del 2° e 4° quadrante.

(10)

A questo punto possiamo dare una
seconda definizione di Iperbole Equilatera

"Una iperbole è equilatera se i suoi asintoti
sono le bisettrici dei quadranti".

Visto che tale tipo di iperbole deriva
dal primo tipo⁽²⁾, utilizzeremo le formule

$$(3) \quad b^2 = c^2 - a^2$$

$$(4) \quad e = \frac{c}{a}$$

Visto che $a = b$ ne diventiamo

$$(4) \quad \cancel{a}^2 = c^2 - \cancel{a}^2$$

$$(15) \quad e = \frac{c}{a}$$

$$a^2 + a^2 = c^2; \quad c^2 = 2a^2; \quad c = \pm \sqrt{2}a; \quad c = \pm a\sqrt{2}$$

consideriamo unicamente l'ordine positiva:

$$c = a\sqrt{2} \quad (16)$$

inseriamo la (16) nella (15)

$$e = \frac{c}{a} = \frac{x\sqrt{2}}{x} = \sqrt{2}$$

$$e = \sqrt{2} \quad (17)$$

Le (16) e le (17) saranno molto utili negli esercizi.

4 - Tipo di Iperbole.

Iperbole equilatera con asse trasverso l'Asse Y. Analogamente al caso precedente 2.° sorta:
L'equazione è

$$y^2 - x^2 = b^2 \quad (18)$$

Gli asintoti sono sempre

$$1^a \quad y = x$$

$$2^a \quad y = -x$$

$$c = b\sqrt{2} \quad (19) \quad e$$

$$e = \sqrt{2} \quad (20)$$

5 - Tipo di Iperbole.

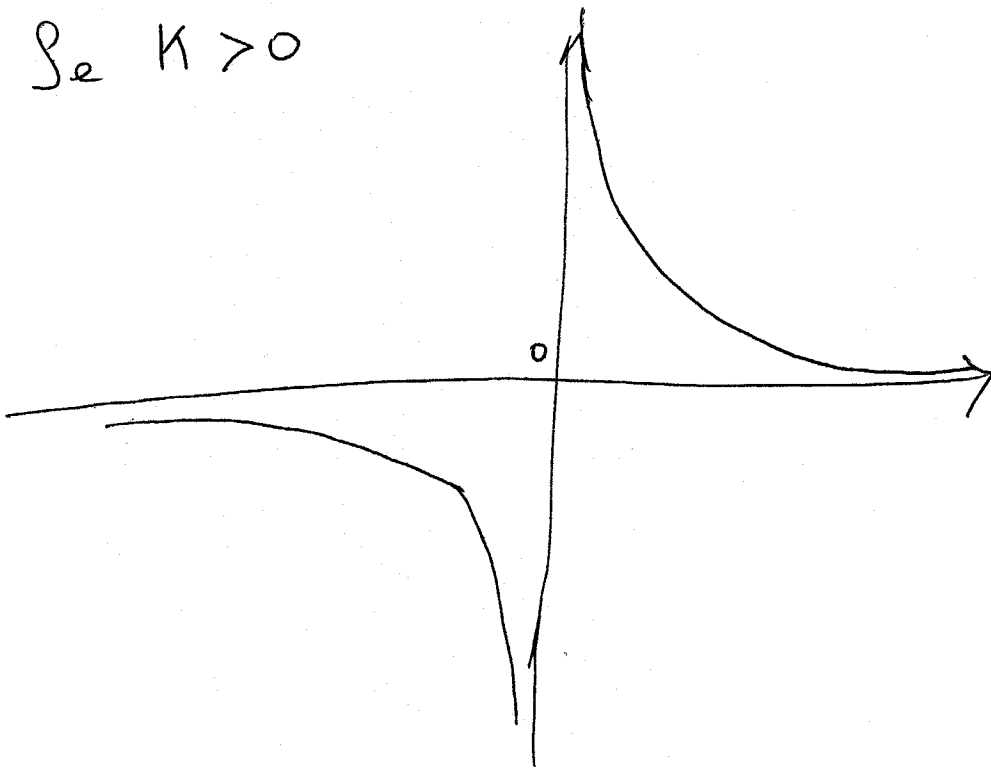
(12)

Iperbole equilatera riferita agli asintoti.

Si ottiene dall'iperbole equilatera applicando la rotazione di 45° ($\frac{\pi}{4}$) dove le bisettrici dei quadranti diventano gli assi cartesiani e gli assi cartesiani diventano gli asintoti.

Si ottiene l'equazione $xy = K$ (21)

Se $K > 0$

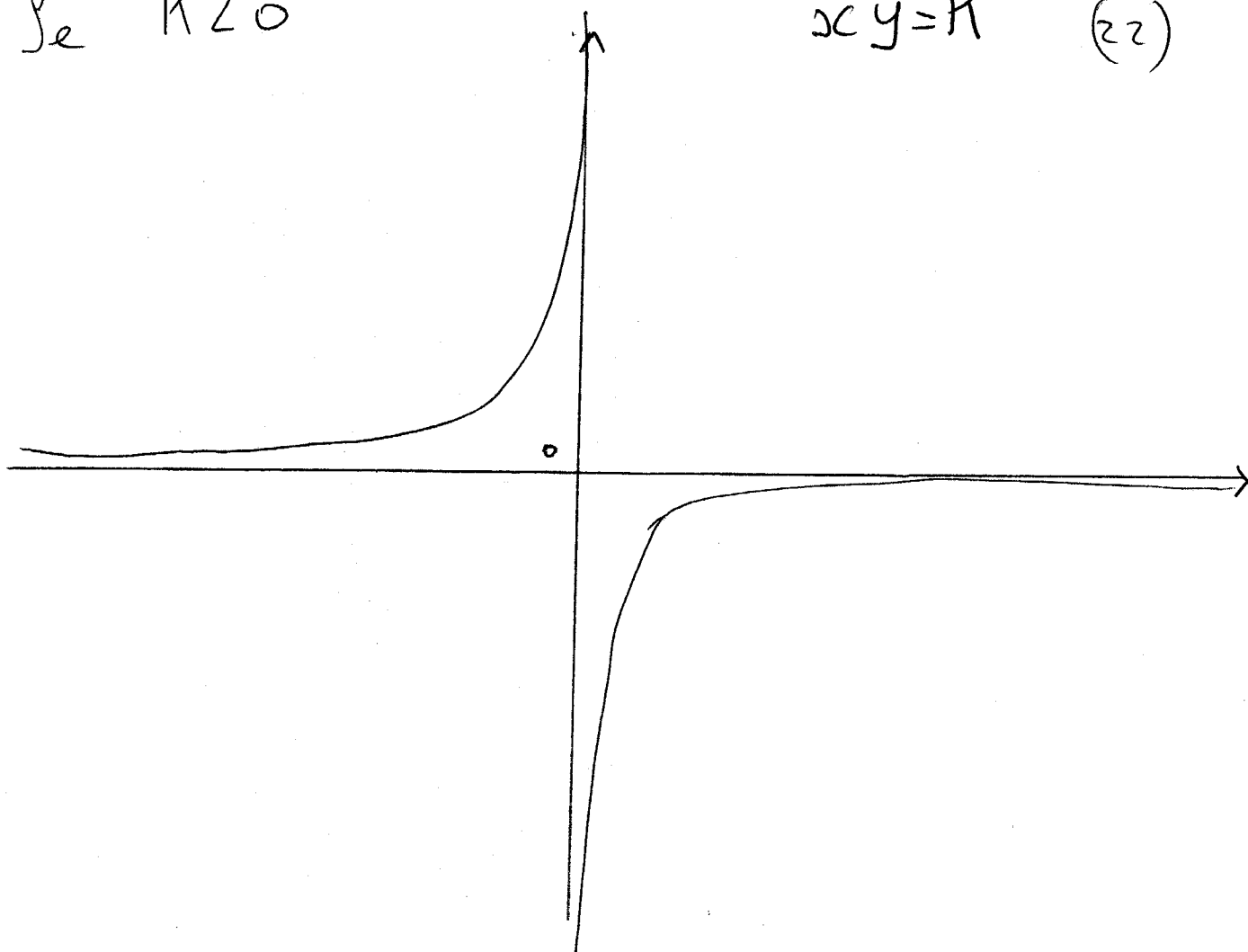


l'iperbole è nel 1° e nel 3° quadrante

Se $K < 0$

$$xy = K \quad (22)$$

13



L'ipercbole è nel 2° e 4° quadrante

In entrambe le ipercboli (equilatera e rettangola)
agli asintoti $[y = -x \text{ e } y = x]$, gli asintoti sono
 $xc = 0 \text{ e } y = 0$.

6-Tipo di Iperbole

(14)

Iperbole Equilatera TRASLAT₄. (funzione Omografica)

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (23)$$

Con $C \neq 0$ e $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

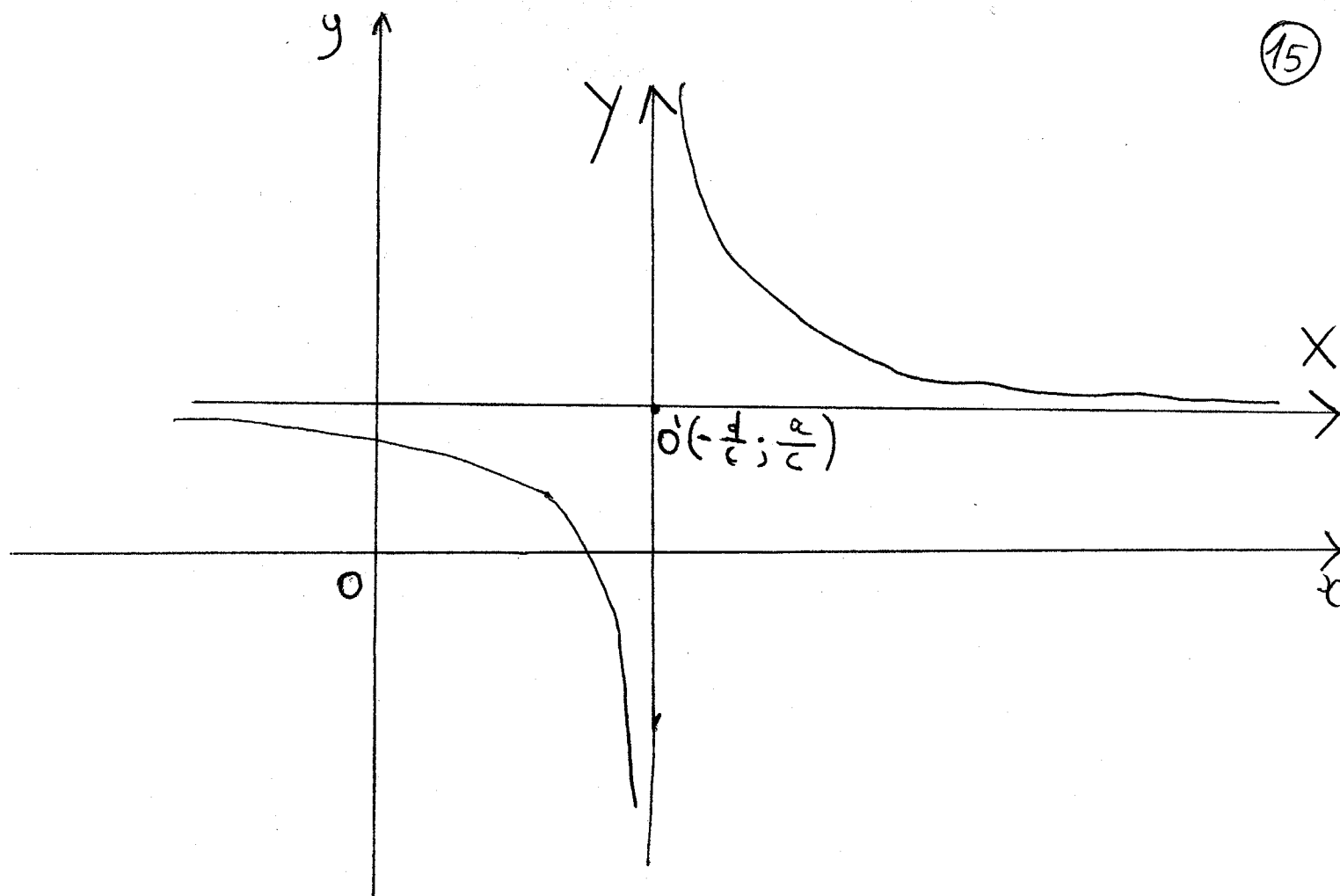
La (23) rappresenta una iperbole equilatera traslata in un sistema di assi cartesiani con nuova origine O'

$$O' \left(-\frac{d}{c} ; \frac{a}{c} \right)$$

In tal caso l'iperbole equilatera traslata (23) ha asintoti

$$x = -\frac{d}{c} \quad e$$

$$y = \frac{a}{c}$$



Se chiamiamo $\Sigma(O, x, y)$ un sistema di riferimento e $\Sigma'(O', x, Y)$ un secondo sistema di riferimento.

Un osservatore posto in O cioè in Σ vede la curva Y ~~co~~ mediante l'equazione

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

. Mentre un osservatore

posto in O' cioè in Σ' vede la stessa curva Y mediante l'equazione

$$XY = K$$