

# Sintesi Disequazioni Irrazionali

Francesco Zumbo

[www.francescozumbo.it](http://www.francescozumbo.it)

<http://it.geocities.com/zumbof/>

*Questi appunti vogliono essere un ulteriore strumento didattico per gli studenti. Idea che mi é venuta dopo essere stato a contatto con bambini e studenti affetti da Sclerosi Multipla, costretti a lunghe degenze presso il Reparto di Neurologia dell'Ospedale di Fidenza (Parma), Divisione Diretta da una Eccezionale persona, il **Prof. Enrico Montanari** a cui mia riconoscenza e stima andranno Sempre.*

*A coloro che vorranno dare un piccolo contributo all'Associazione Nazionale per la Lotta Contro la Sclerosi Multipla (sezione di Parma) un Grande Grazie!!!*

Conto Corrente Postale : 13 50 34 38 - Intestato a: AISM di Parma (Associazione Italiana Sclerosi Multipla) di Parma - Indirizzo: Piazzale S. Sepolcro, 3 - 43100 Parma (PR) - Telefono : 0521-231251.

Con la seguente Causale: **+ Matematica , - Sclerosi Multipla**

$A(x)$  e  $B(x)$  sono polinomi, di qualsiasi grado, nella variabile  $x$  e  $k$  é una costante

Ad esempio:

$$A(x) = 2x^2 + 3x + 1$$

$$A(x) = 3x - 5$$

$$A(x) = \frac{1}{3}x + 7$$

$$B(x) = 3x - 4$$

$$B(x) = 2x^3 - 3$$

## 1. I VARI TIPI DI DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

$$(1.1) \quad \sqrt[n]{A(x)} < k$$

$$(1.2) \quad \sqrt[n]{A(x)} > k$$

$$(1.3) \quad \sqrt[n]{A(x)} < B(x)$$

$$(1.4) \quad \sqrt[n]{A(x)} > B(x)$$

$$2. \text{ ANALIZZIAMO } \sqrt[n]{A(x)} < k$$

Se ***n-dispari*** la (1.1) equivale a studiare la disequazione:

$$(2.1) \quad A(x) < k^{n-dispari}$$

Se ***n-pari*** si deve osservare il valore di  $k$

Per  $k < 0$  *Non ci sono soluzioni*

Per  $k > 0$  si studia il sistema

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) < k^{n-pari} \end{cases}$$

### 3. ANALIZZIAMO $\sqrt[n]{A(x)} > k$

Se ***n-dispari*** si studia la disequazione

$$(3.1) \quad A(x) > k^{n-dispari}$$

Se ***n-pari*** si deve osservare il valore di  $k$

Per  $k < 0$  si studia la disequazione

$$(3.2) \quad A(x) \geq 0$$

Per  $k > 0$  si studia la disequazione

$$(3.3) \quad A(x) > k^{n-pari}$$

### 4. ANALIZZIAMO $\sqrt[n]{A(x)} < B(x)$

Se ***n-dispari*** si studia la disequazione

$$(4.1) \quad A(x) < [B(x)]^{n-dispari}$$

Se ***n-pari*** lo studio della disequazione equivale a studiare il sistema formato da 3 disequazioni

$$\begin{cases} B(x) > 0 \\ A(x) \geq 0 \\ A(x) < [B(x)]^{n-pari} \end{cases}$$

5. ANALIZZIAMO  $\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$

Se  $\mathbf{n} - dispari$  si studia

$$(5.1) \quad A(x) > [B(x)]^{n-dispari}$$

Se  $\mathbf{n} - pari$  si studia l'unione di due sistemi

$$(5.2) \quad \begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^{n-pari} \end{cases}$$

## 6. CONSIDERAZIONE GENERALE

Nel caso in cui le disequazioni irrazionali sono nella forma  $\leq$  o  $\geq$ , nelle sintesi precedenti basta sostituire  $<$  con  $\leq$  e  $>$  con  $\geq$ .

# Complementi sulle disuguaglianze irrazionali

①

1° tipo

$$\sqrt{x-4} < \sqrt{2x+1} \quad (1)$$

Tale tipologia non appartiene alle 4 famiglie precedenti.

La prima cosa da fare è calcolare il C.E. (campo di esistenza) di tutte le quantità presenti nella disuguaglianza.

Successivamente, se e se  $C.E. \neq \emptyset$  si calcolano le soluzioni analitiche di (1):  $S_A$

Per determinare la Soluzione Generale di (1) si deve calcolare

$$C.E. \cap S_A = S.G.$$

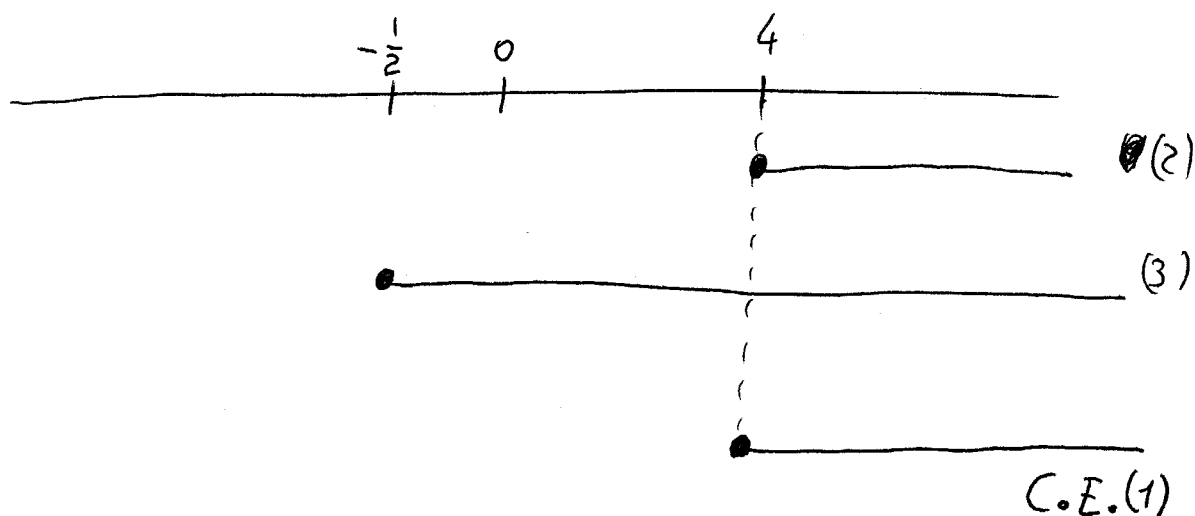
Calcoliamo C.E. di (1)

(2)

$$\begin{cases} x-4 \geq 0 & (2) \\ 2x+1 \geq 0 & (3) \end{cases}$$

(2)  $x-4 \geq 0, x \geq 4$

(3)  $2x+1 \geq 0, 2x \geq -1, x \geq -\frac{1}{2}$



Calcoliamo le soluzioni analitiche di (1)

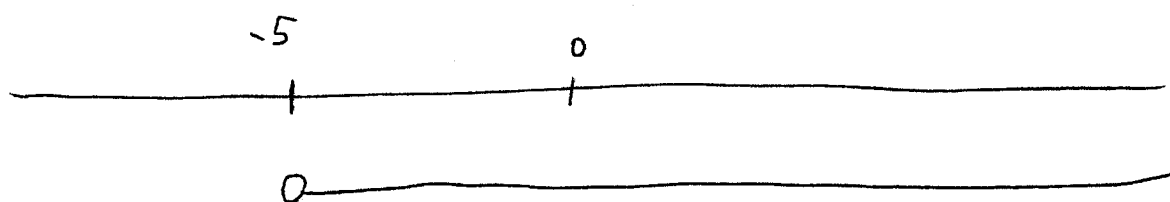
Dobbiamo applicare tutte le regole dell'analisi matematica al fine di eliminare i radicali o rientrare in una delle 4 famiglie canoniche delle disuguaglianze irrazionali.

Elevisiamo al quadrato le (1)

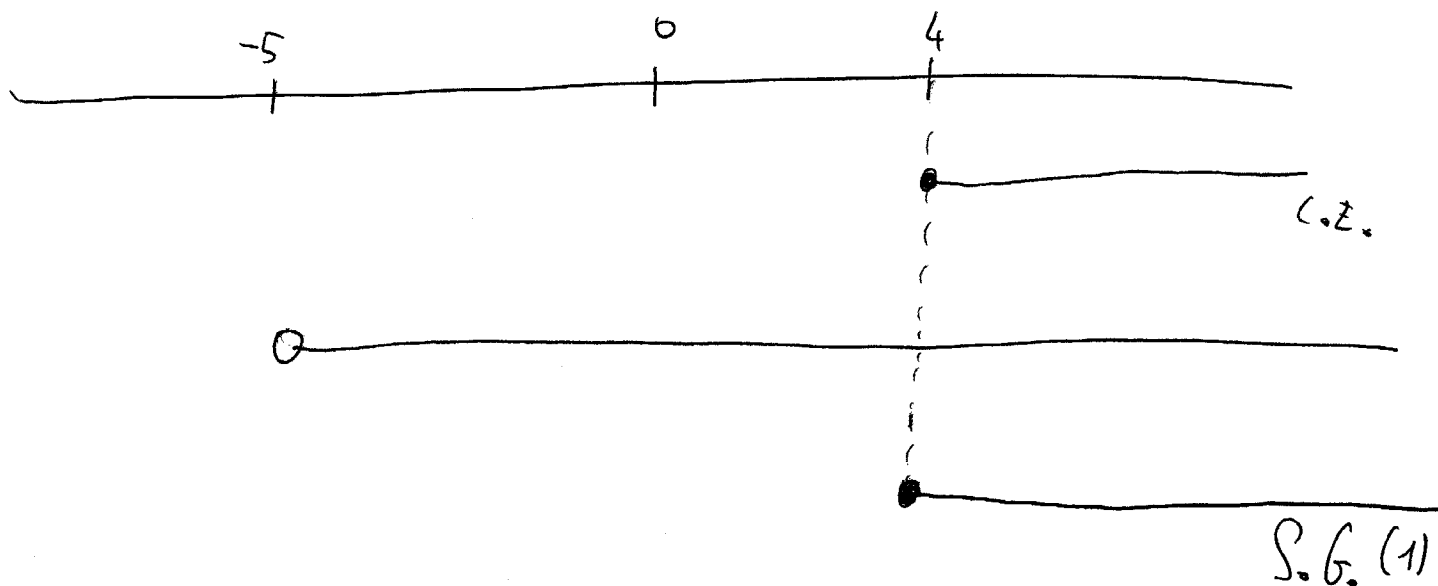
③

$$x-4 < 2x+1 ; \quad x-2x < 4+1 ; \quad -x < 5$$

$$x > -5 : S_A$$



Per determinare le Soluzioni Generali di (1)  
dobbiamo calcolare  $C.E.(1) \cap S_A(1)$



$$\text{cioè } x \geq 4 \Rightarrow x \in [4; +\infty[$$

2º Tipo

(4)

$$\sqrt{2x-4} + \sqrt{x+3} < \sqrt{3x+1} \quad (1)$$

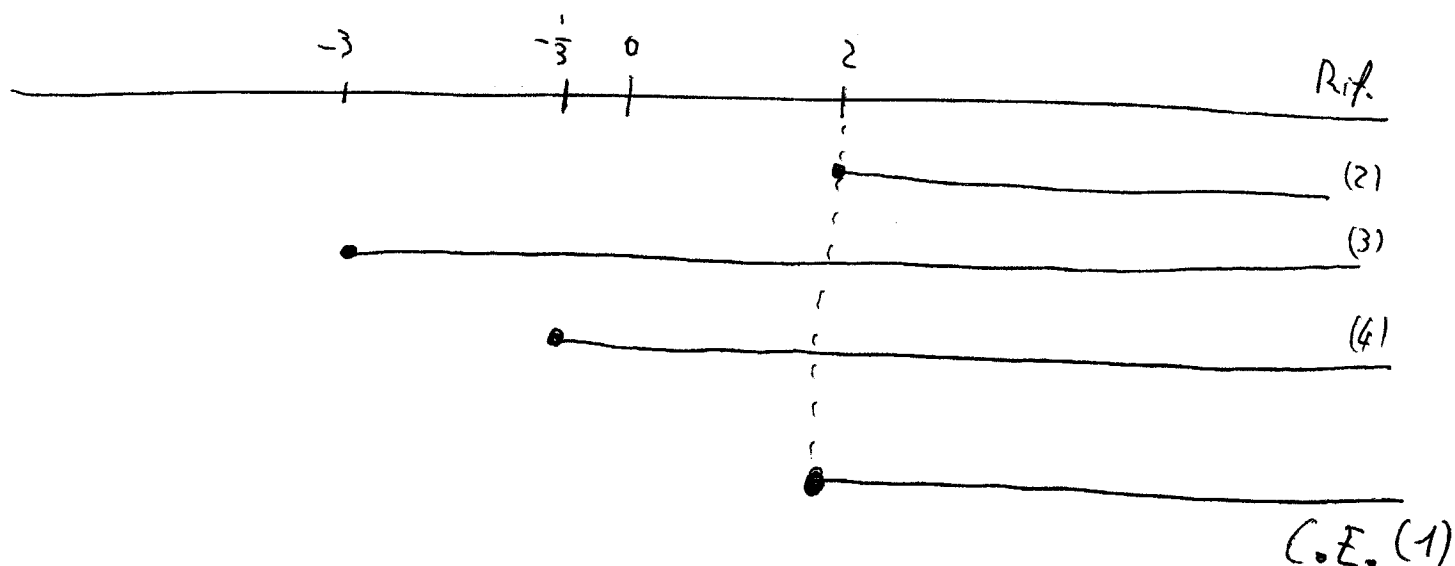
Calcoliamo C.E.

$$\begin{cases} 2x-4 \geq 0 & (2) \\ x+3 \geq 0 & (3) \\ 3x+1 \geq 0 & (4) \end{cases}$$

(2)  $2x-4 \geq 0$ ,  $2x \geq 4$ ,  $x \geq 2$ .

(3)  $x+3 \geq 0$ ,  $x \geq -3$ .

(4)  $3x+1 \geq 0$ ,  $3x \geq -1$ ,  $x \geq -\frac{1}{3}$ .



A questo punto determiniamo le soluzioni analitiche di (4). ⑤

Eleviamo la disuguaglianza (1) al quadrato

$$(2x-4) + (x+3) + 2\sqrt{(2x-4)(x+3)} < 3x+1;$$

$$2x-4+x+3+2\sqrt{(2x-4)(x+3)} < 3x+1;$$

$$2\sqrt{(2x-4)(x+3)} < -2x+4-x-3+3x+1;$$

$$2\sqrt{(2x-4)(x+3)} < 2; \text{ dividiamo per 2}$$

$$\sqrt{(2x-4)(x+3)} < 1 \quad (5)$$

Siamo ricaduti nella nota famiglia

$$\sqrt{A(x)} < K \quad \text{con } K > 0$$

Le (5) equivale a studiare

(6)

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) < K^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x-4)(x+3) \geq 0 & (6) \\ (2x-4)(x+3) < 1 & (7) \end{cases}$$

Studiamo la (6)

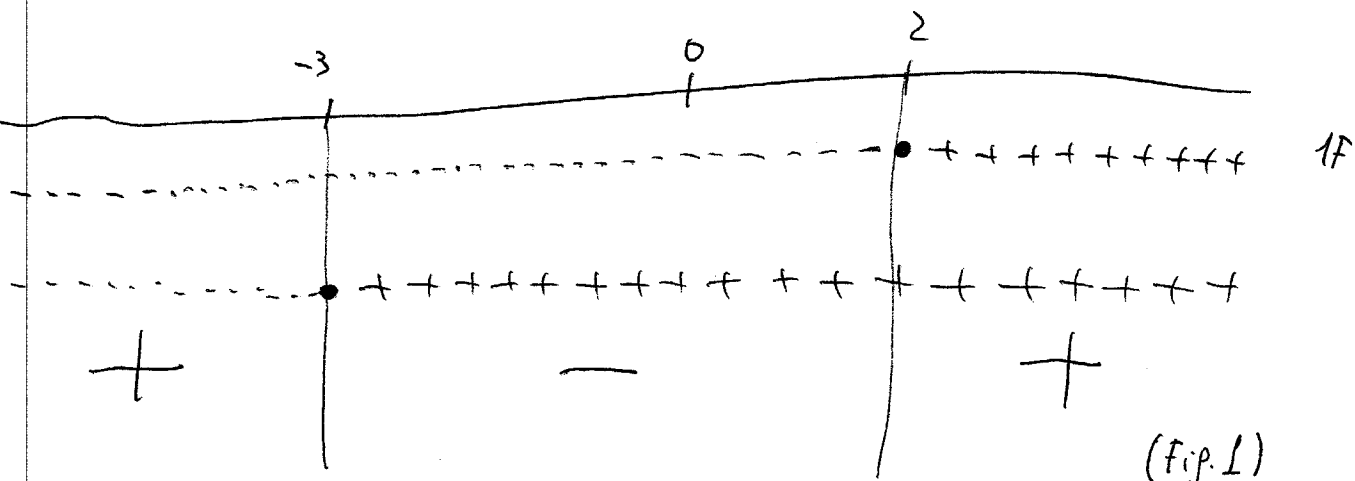
$$(2x-4)(x+3) \geq 0 \quad (6)$$

1F      2F

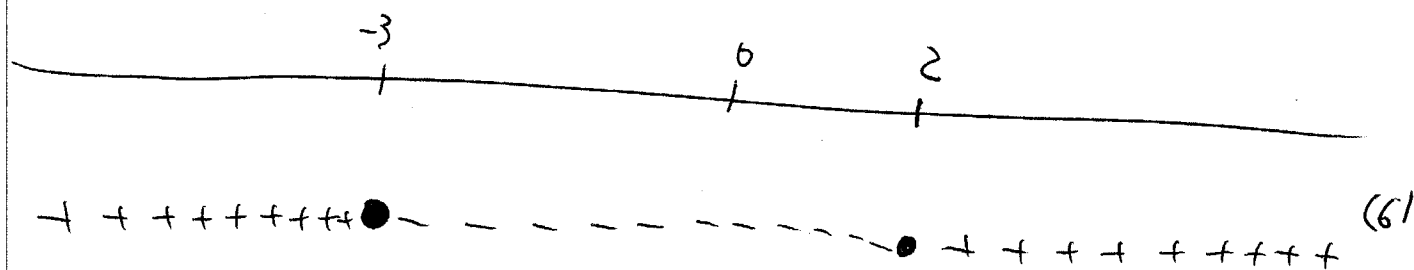
la studiamo lasciandola come prodotto di 2 quantità di primo grado e successivamente faremo il prodotto dei segni.

$$2x-4 \geq 0, \quad 2x \geq 4, \quad x \geq 2. \quad 1F$$

$$2F: \quad x+3 \geq 0, \quad x \geq -3$$

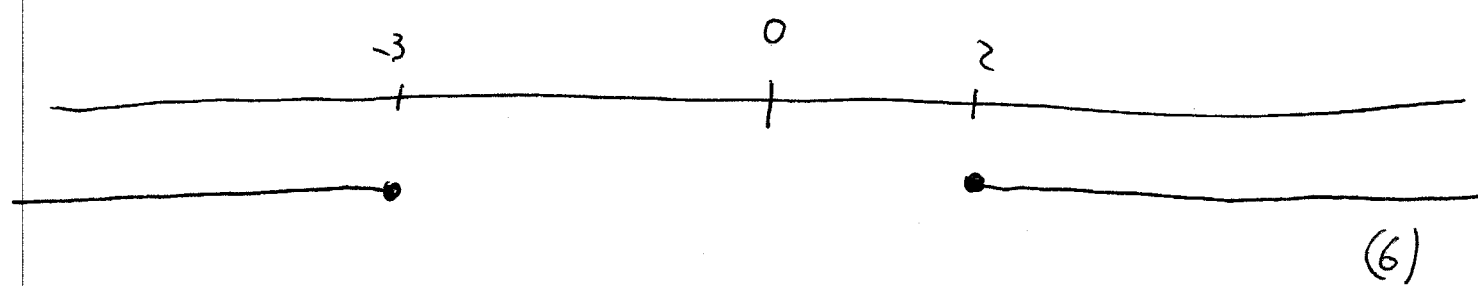


Ricordiamo che la soluzione • che abbiamo  
 ottenuta studiando il  $\geq 0$  quindi • è positiva  
 in particolare • corrisponde all'uguale a 0.  
 $\Rightarrow$



(Fig. 2)

La (figura 2) rappresenta lo studio del segno delle  
 disuguaglianze (6), ma la (6) è inserita in un  
 contesto di (sistemi di disuguaglianze) quindi a noi  
 interessa rappresentare soltanto la soluzione  
 positiva delle (6) mediante linea continua, visto  
 che la (6) nel sistema richiede il  $\geq 0$ .



(6)

Studiamo la (7)

⑧

$$(2x-4)(x+3) < 1, \quad 2x^2 + 6x - 4x - 12 < 1;$$

$$2x^2 + 2x - 12 - 1 < 0; \quad 2x^2 + 2x - 13 < 0$$

$$2x^2 + 2x - 13 < 0 \quad (8)$$

studiamo l'equazione associata

$$2x^2 + 2x - 13 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(2)(-13) = 4 + 104 = 108$$

$$\begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

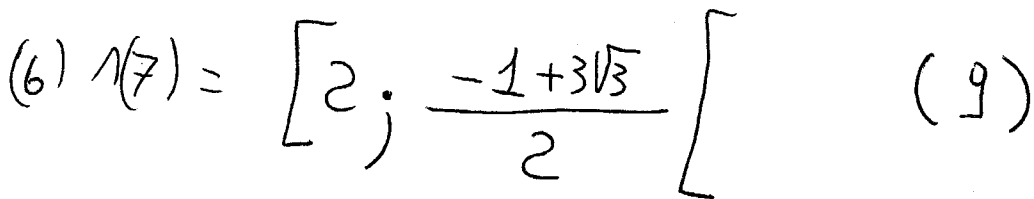
$$108 = 2^2 \cdot 3^3$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} =$$

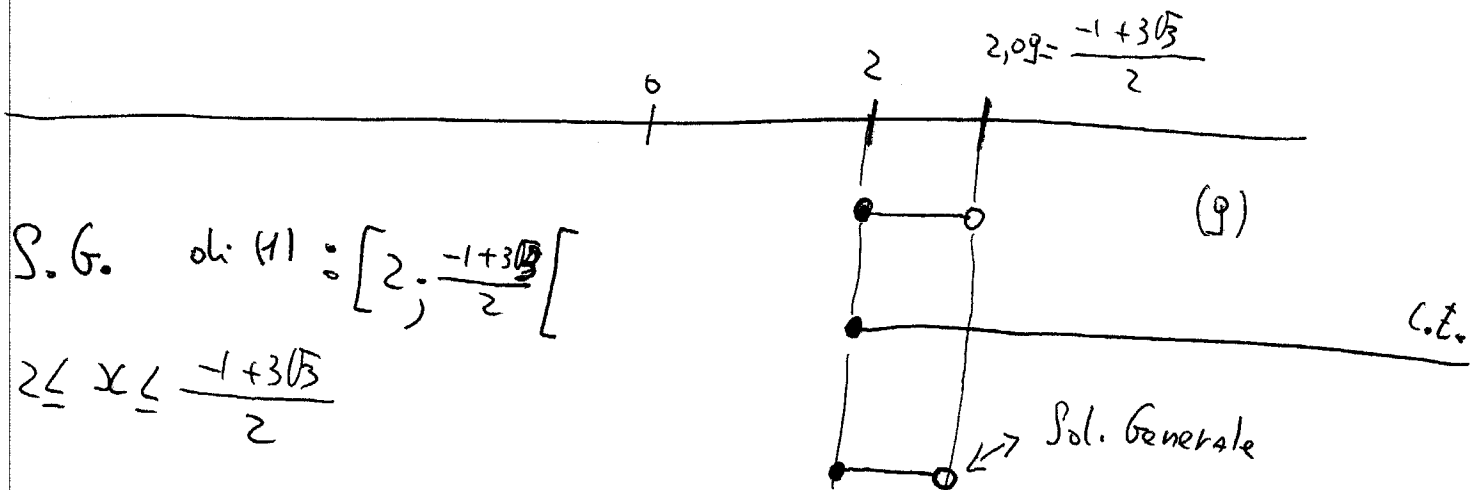
$$= 2 \cdot 3 \sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$



10



Per determinare la Soluzione Generale 2.<sup>a</sup> fase  
intersecare le (9) con (6).



### 3 Tipo

Disuguaglianze irrazionali del tipo:

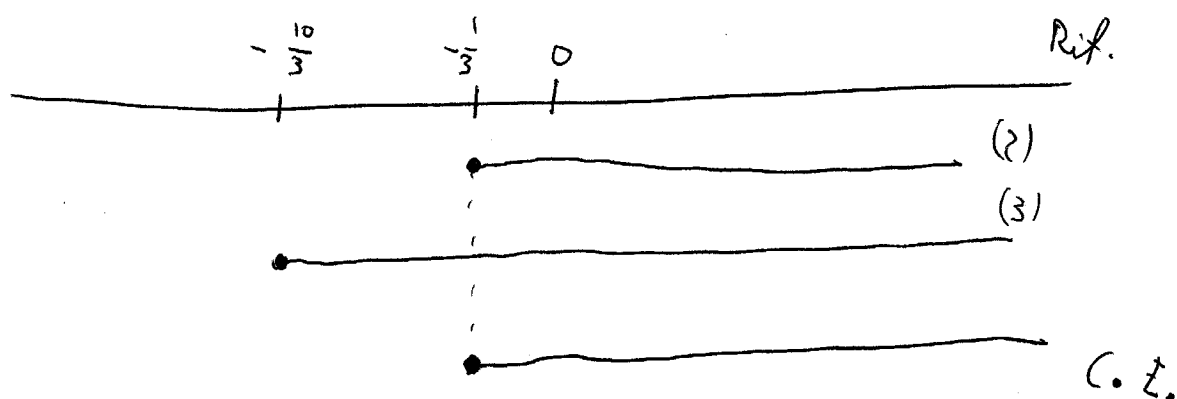
$$\sqrt{3x+1} > 9 - \sqrt{3x+10} \quad (1)$$

Determiniamo il C.E.

$$\begin{cases} 3x+1 \geq 0 & (2) \\ 3x+10 \geq 0 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \quad 3x \geq -1, \quad x \geq -\frac{1}{3} \approx -0,33$$

$$(3) \quad 3x \geq -10; \quad x \geq -\frac{10}{3} \approx -3,33$$



$$C.E. = [-\frac{1}{3}; +\infty[ \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{3} \leq x < +\infty \quad \Rightarrow \quad x \geq -\frac{1}{3}$$

manipoliamo analiticamente le 4) al fine  
di condurle ad una delle 4 famiglie delle  
dis. irraz.

$$\sqrt{3x+1} + \sqrt{3x+10} > 9$$

eleviamo al quadrato:

$$(3x+1) + (3x+10) + 2\sqrt{3x+1} \cdot \sqrt{3x+10} > 81 ;$$

$$3x+1 + 3x+10 + 2\sqrt{(3x+1)(3x+10)} > 81 ;$$

$$6x+11 + 2\sqrt{(3x+1)(3x+10)} > 81 ;$$

$$2\sqrt{(3x+1)(3x+10)} > 81 - 6x - 11 ;$$

$$2\sqrt{(3x+1)(3x+10)} > 70 - 6x ;$$

$$\sqrt{(3x+1)(3x+10)} > \frac{70-6x}{2} ;$$

$$\sqrt{(3x+1)(3x+10)} > 35-3x \quad (4)$$

le (4) appartiene alla canonica famiglia

$$\sqrt{A(x)} > B(x) \quad \text{che equivale a studiare}$$

$$\left. \begin{array}{l} B(x) < 0 \quad (5) \\ A(x) \geq 0 \quad (6) \end{array} \right\} \begin{array}{l} B(x) \geq 0 \quad (7) \\ A(x) > [B(x)]^2 \quad (8) \end{array} \quad \text{[*1]}$$

dalla (4)

$$\sqrt{9x^2 + 30x + 3x + 10} > 35 - 3x$$

$$\sqrt{9x^2 + 33x + 10} > 35 - 3x \quad (9)$$

applichiamo alla (9) lo sviluppo [\*1]

$$(5) \quad 35 - 3x < 0; \quad 35 < 3x; \quad x > \frac{35}{3} \approx 11,67$$

(6)

(14)

$$9x^2 + 33x + 10 \geq 0$$

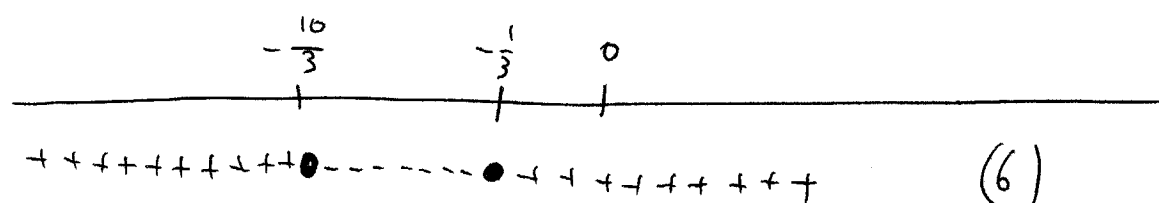
$$\Delta = (33)^2 - 4(9)(10) = 1089 - 360 = 729$$

$$\sqrt{\Delta} = 27$$

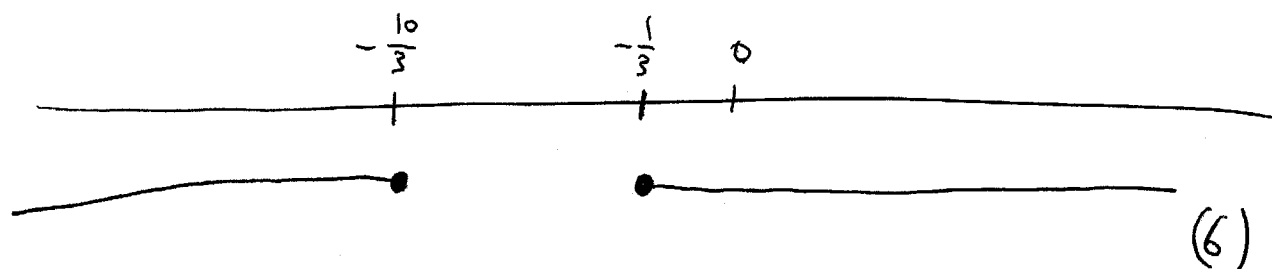
$$x = \frac{-33 \pm 27}{18} = \frac{-11 \pm 9}{6} = \frac{-11 \pm 9}{6} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-11 - 9}{6} = \frac{-20}{6} = -\frac{10}{3} \approx -3,33 & x_1 \\ \frac{-11 + 9}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \approx -0,33 & x_2 \end{cases}$$

grafico di (6) con i segni espliciti:



Le (6) è in un contatto di sistema  
quindi indichiamo le (6) ~~come~~ opportunamente



Studiamo le (7)

$$35 - 3x \geq 0 ; 35 \geq 3x ; x \leq \frac{35}{3} \approx 11,67$$

Studiamo le (8)

$$9x^2 + 33x + 10 > (35 - 3x)^2 ;$$

$$9x^2 + 33x + 10 > 1225 + 9x^2 - 210x ;$$

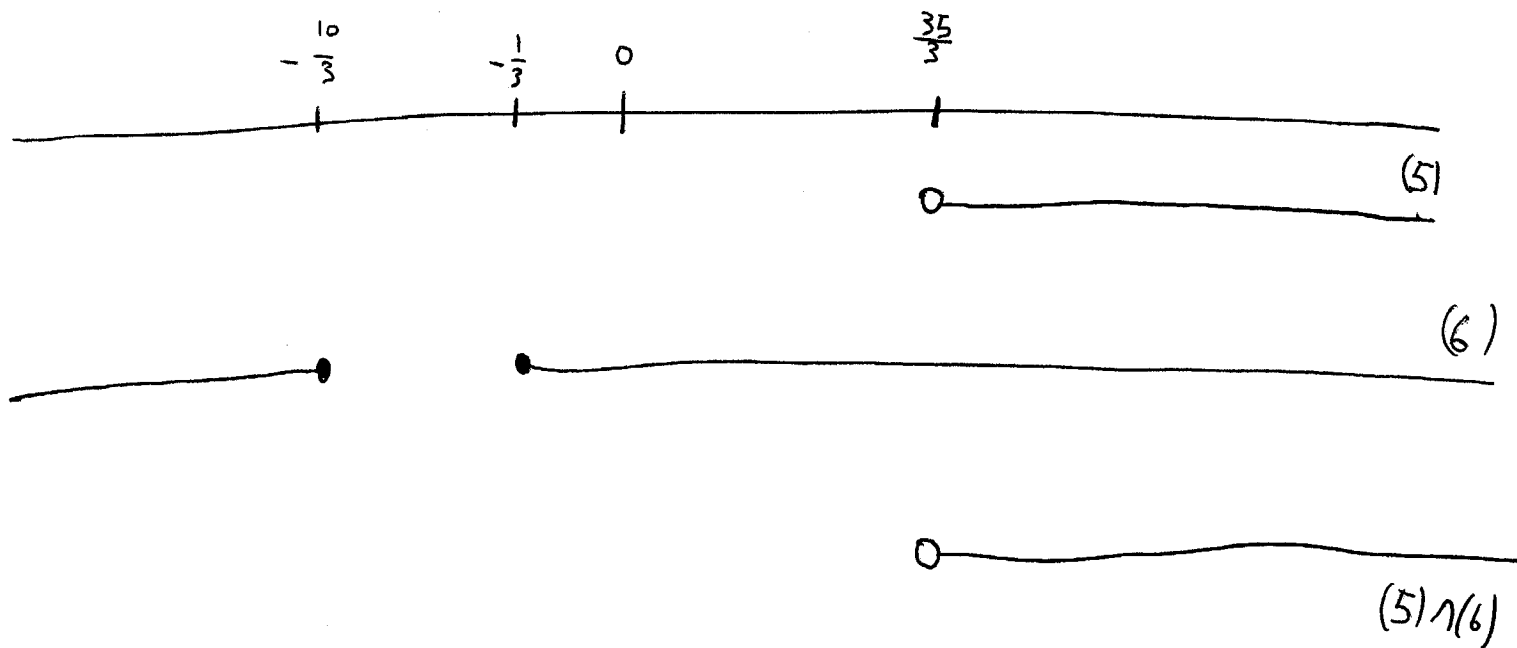
$$\cancel{9x^2} + 33x + 10 - 1225 - \cancel{9x^2} + 210x > 0 ;$$

$$243x - 1215 > 0 ; 243x > 1215 ;$$

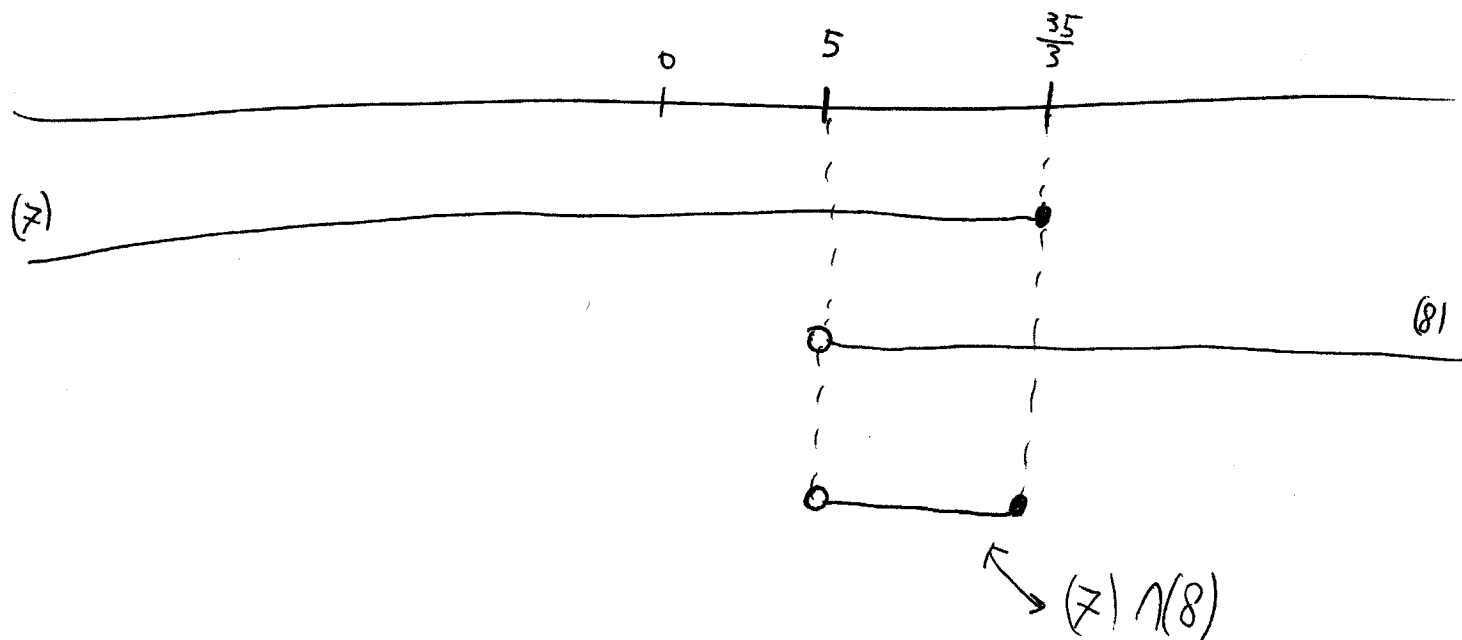
$$x > \frac{\overset{405}{\cancel{1215}}}{\underset{81}{\cancel{243}}} ; x > \frac{405}{81} ; x > 5$$

⑥

Studiamo il sistema  $(5) \wedge (6)$



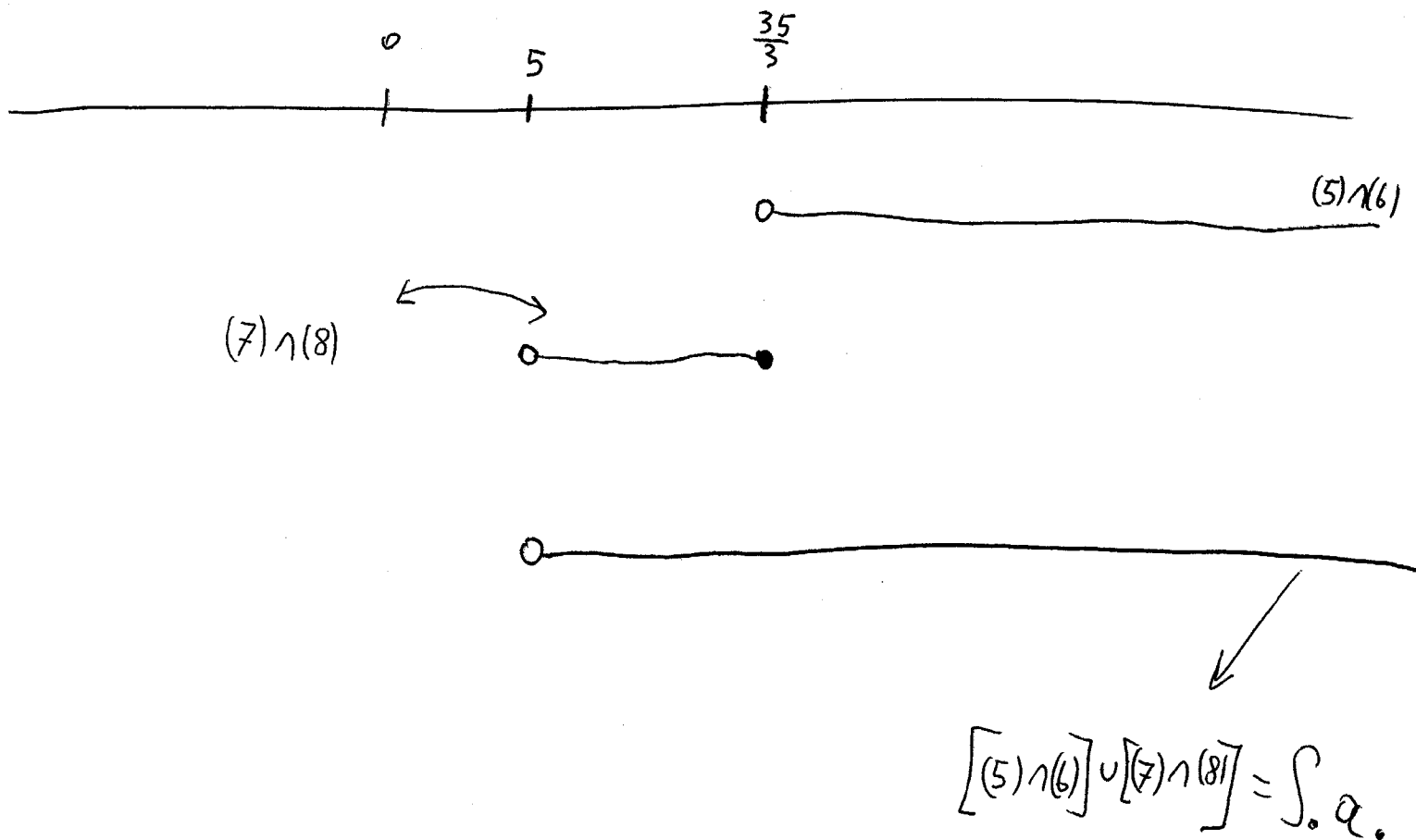
Studiamo ~~(5) e (6)~~ il sistema  $(7) \wedge (8)$



Studiamo l'unione

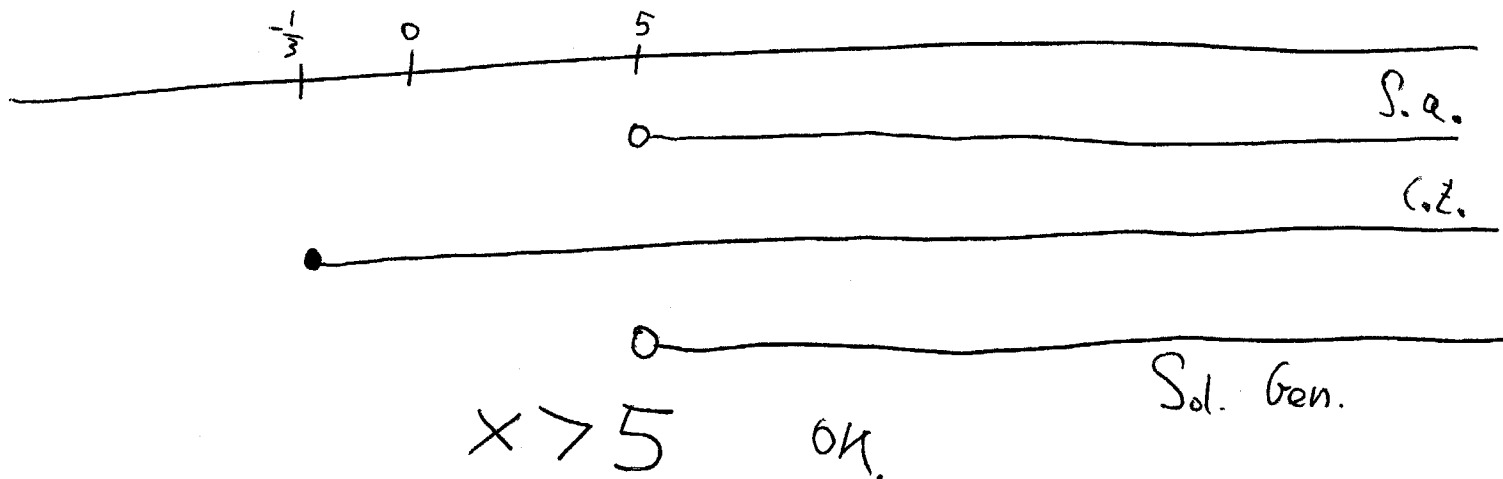
17

$$[(5) \wedge (6)] \vee [(7) \wedge (8)]$$



La soluzione è la soluzione analitica

Intersechiamo la S.a. con C.E.



4 Tipo

$$\sqrt[3]{x^3 - 1} < \sqrt{x^2 + 1} \quad (1)$$

Calcoliamo C.T.

Dobbiamo studiare soltanto  $x^2 + 1 > 0$ 

in quanto l'argomento di radici di indice dispari (3) può essere anche  $< 0$ .

C.T.  $\bullet x^2 + 1 > 0$

$x^2 + 1 = 0$ ; non ha soluzioni reali.

La disuguaglianza  $x^2 + 1 > 0$  è sempre verificata

0

C.T.

si deve elevare la (1) alle  
potenze:  $m.c.m(2,3)=6$

Consideriamo la (1) come potenza

$$(x^3-1)^{\frac{1}{3}} < (x^2+1)^{\frac{1}{2}} \quad \text{eleviamo:}$$

$$\left[ (x^3-1)^{\frac{1}{3}} \right]^6 < \left[ (x^2+1)^{\frac{1}{2}} \right]^6 ;$$

$$(x^3-1)^2 < (x^2+1)^3 ;$$

$$\cancel{x^6} + \cancel{x} - 2x^3 < \cancel{x^6} + 3x^4 + 3x^2 + \cancel{1}$$

$$-2x^3 - 3x^4 - 3x^2 < 0$$

$$-3x^4 - 2x^3 - 3x^2 < 0 \quad (*1)$$

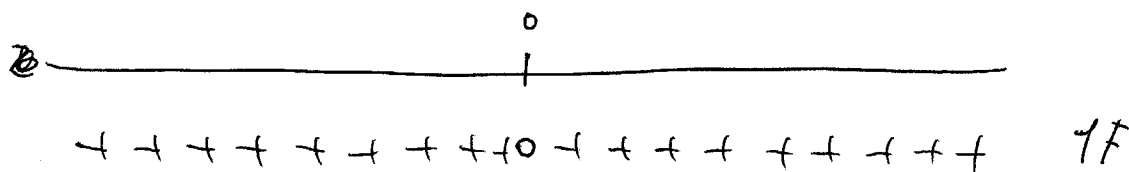
moltiplichiamo per  $(-1)$  ricordando che le  
disuguaglianze di indice pari moltiplicate per  $(-1)$  per  
le soluzioni va cambiata di segno

$$3x^4 + 2x^3 + 3x^2 > 0$$

(20)

$$x^2(3x^2 + 2x + 3) > 0$$

1F :  $x^2 > 0$  sempre o escluso

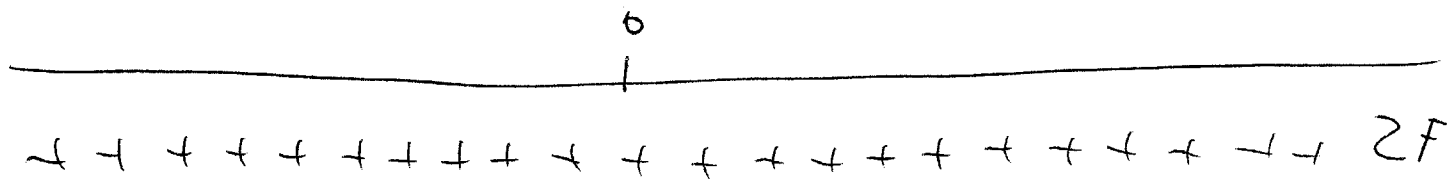


$$2F : 3x^2 + 2x + 3 > 0$$

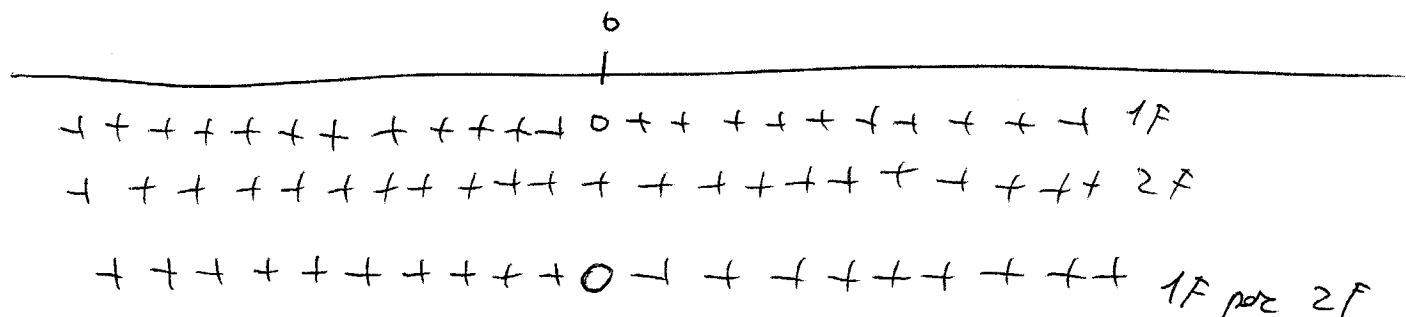
$$\Delta = 4 - 4(3)(3) < 0$$

Ricordiamo che le famiglie  $> 0$  e  $\Delta < 0$

$\Rightarrow$  soluzioni tutte +

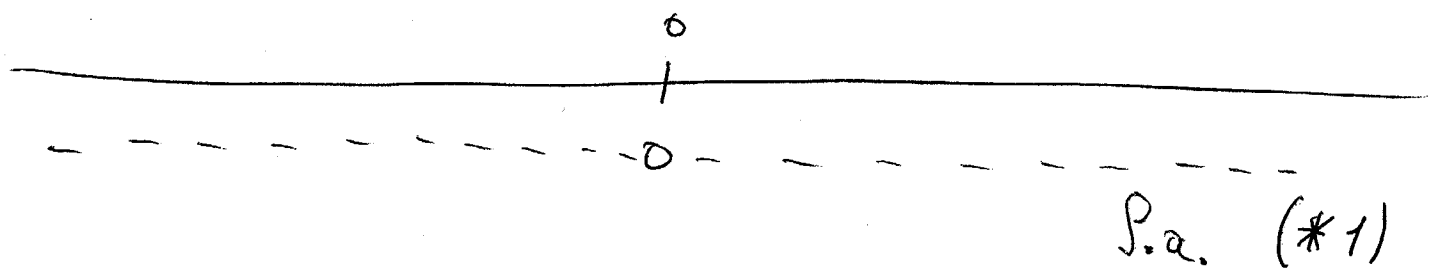


Calcoliamo il prodotto 1F per 2F



moltiplichiamo le soluzioni per  $(-1)$

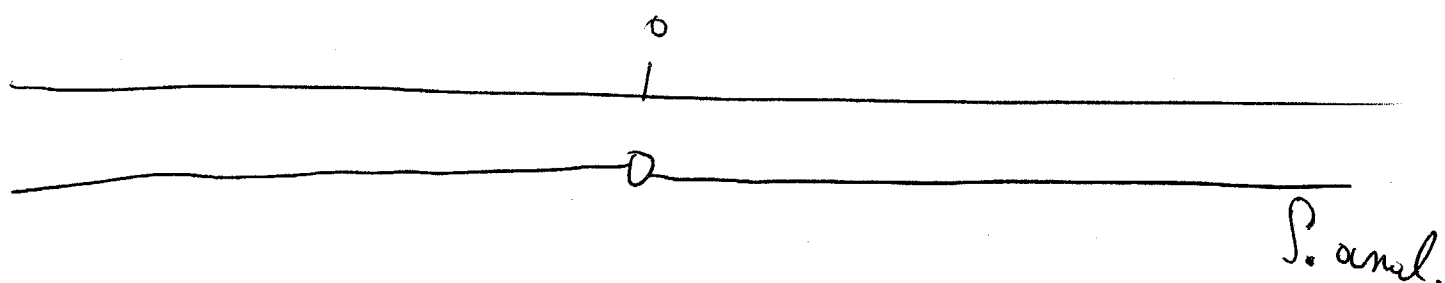
(21)



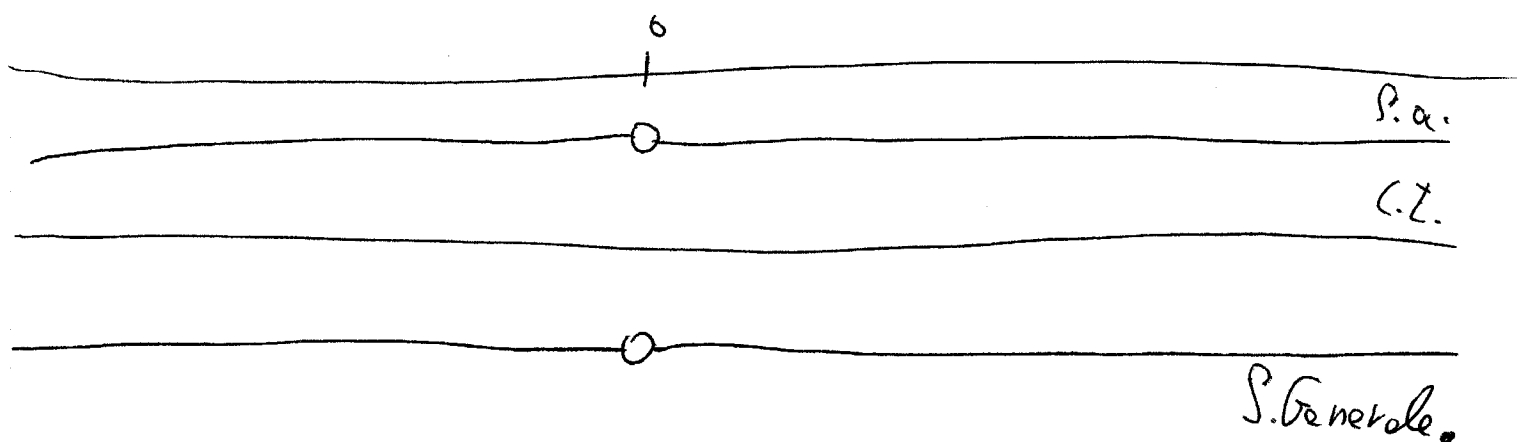
questo è il grafico della disuguaglianza (\*1) scritta.

Ma noi abbiamo le necessità di intersezione le

Sol. anal. con C.E. quindi il grafico dobbiamo presentarlo in linea continua



Studiamo  $S.a. \cap C.E.$



## DISEQUAZIONI Biquadratiche

(22)

Altre volte i fattori di disequazioni  
irrazionali sono disequazioni biquadratiche

$$x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0 \quad (1)$$

si studia l'equazione associata:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad (2)$$

si pone  $x^2 = t$

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \quad (3) \quad \text{risolviamo la (3)}$$

$$\Delta = 25 - 4(1)(4) = 9$$

$$t = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

per la decomposizione di Coctorio la (3) diventa

$$(t - 4)(t - 1) = 0 \quad (4) \quad \text{usando essendo } x^2 = t$$

$$(x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0 \quad (5)$$

Studio le (1) equale a studio le

(23)

$$(x^2 - 4)(x^2 - 1) \leq 0$$

si pone 1°  $x^2 - 4$

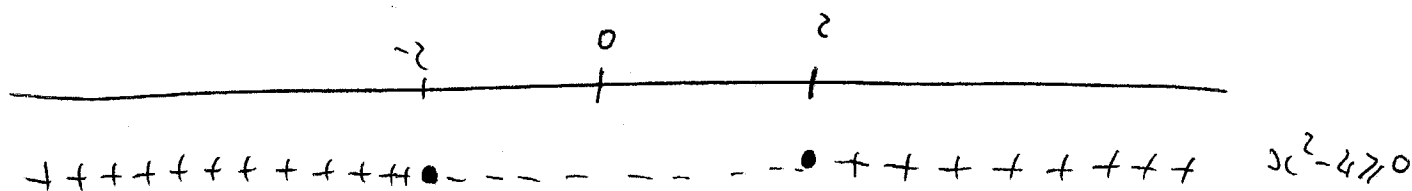
si pone 2°  $x^2 - 1$

si studia  $x^2 - 4 \geq 0$  e  $x^2 - 1 \geq 0$

~~no~~

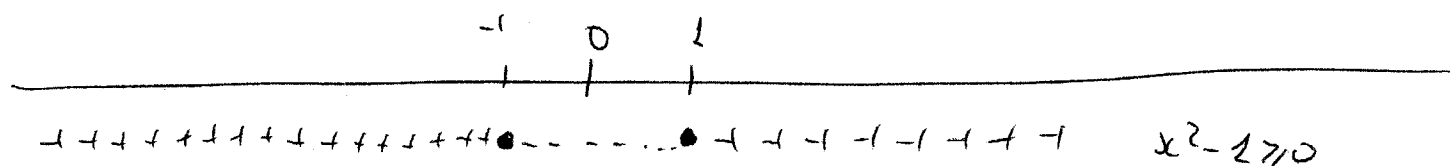
$$x^2 - 4 \geq 0 \quad x^2 - 4 = 0, \quad x^2 = 4; \quad x = \begin{cases} +2 \\ -2 \end{cases}$$

$$\Delta = 0 - 4(1)(-4) = 16$$

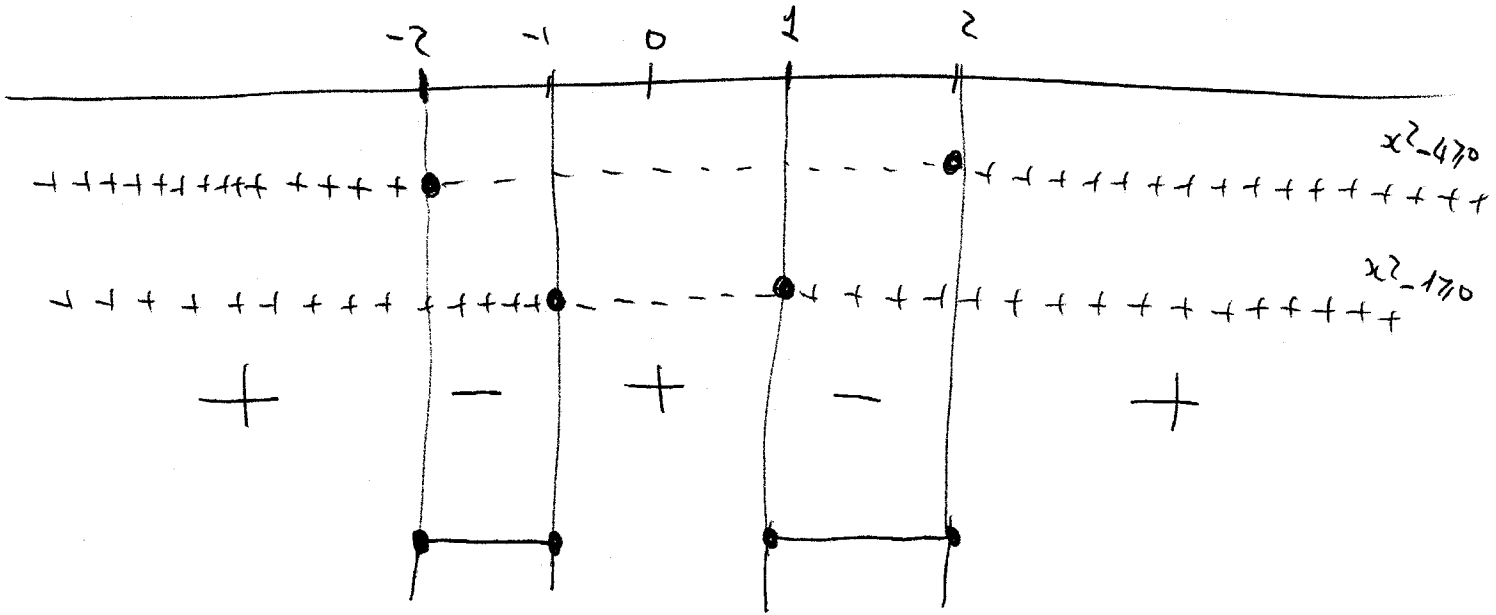


~

$$x^2 - 1 \geq 0; \quad x^2 - 1 = 0, \quad x^2 = 1; \quad x = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$



Studiamo il prodotto dei segni



Soluzione di (1):  $[-2; -1] \cup [1; 2]$

cioè  $-2 \leq x \leq -1 \cup 1 \leq x \leq 2$ .

# Equazioni Irrazionali

25

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x) \quad (1)$$

se  $n$ -dispari si eleva a potenza  $n$ -dispari

e si studia

$$A(x) = [B(x)]^{n\text{-dispari}}$$



Se  $n$ -PARI

o si studia il sistema

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^{n\text{-pari}} \end{cases}$$

oppure, ed è la stessa cosa si studia il sistema

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^{n\text{-pari}} \end{cases}$$

## Casi particolari di Equazioni Irrazionali (26)

1 caso

$$\sqrt[3]{x^2 - 2x} = \sqrt[3]{4 + 5x} \quad (1)$$

Visto che l'indice delle radici è dispari  
non si studia C.E. ma si eleva semplicemente  
alla ~~potenza~~  $3^a$  potenza

$$x^2 - 2x = 4 + 5x$$

non sviluppiamo ulteriormente i calcoli in quanto  
si sono ristretti in equazioni molto semplici.



2 caso

(27)

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-4} = \sqrt{3x+7} \quad (1)$$

si studia il C.E. :

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x-4 \geq 0 \\ 3x+7 \geq 0 \end{cases}$$

Successivamente si eleva una o più volte al quadrato la (1) al fine di non avere più i radicali.

Seguendo tale via l'equazione irrazionale che si trasforma in una equazione razionale.

Chiamiamo S. Analitica tale soluzione cercata.

Successivamente sarà immediato determinare la Soluzione Generale.

$$S.G. = C.E. \cap S.Analitica$$