Sessione ordinaria 2011
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita sull'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali da $f(x) = x + \ln 4 + \dfrac{2}{e^x + 1}$ e sia Γ la sua rappresentazione grafica nel sistema di riferimento Oxy.

1. Si determini il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e a $-\infty$. Si calcoli $f(x) + f(-x)$ e si spieghi perchè dal risultato si può dedurre che il punto $A(0;\, 1 + \ln 4)$ è centro di simmetria di Γ.
2. Si provi che, per tutti i reali m, l'equazione $f(x) = m$ ammette una e una sola soluzione in $\mathbf{R}$. Sia α la soluzione dell'equazione $f(x) = 3$; per quale valore di m il numero $-\alpha$ è soluzione dell'equazione $f(x) = m$?
3. Si provi che, per tutti gli x reali, è: $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$. Si provi altresì che la retta r di equazione $y = x + \ln 4$ e la retta s di equazione $y = x + 2 + \ln 4$ sono asintoti di Γ e che Γ è interamente compresa nella striscia piana delimitata da r e da s.
4. Posto $I(\beta) = \displaystyle\int_0^\beta [f(x) - x - \ln 4]\,dx$, si calcoli: $\displaystyle\lim_{\beta \to +\infty} I(\beta)$. Qual è il significato geometrico del risultato ottenuto?

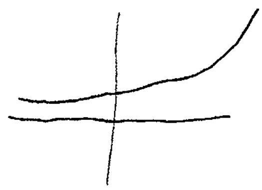
Punto 1

$$y = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} \qquad (1)$$

Calcoliamo $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1} = \lim_{x \to +\infty} x + \lim_{x \to +\infty} \ln 4 +$$

$$+ \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x+1} = +\infty + \ln 4 + \frac{2}{e^{+\infty}+1} \qquad (2)$$

Visto il grafico di e^x  si ha che

$e^{+\infty} = +\infty \Rightarrow$ da (2)

$$+\infty + \ln 4 + \frac{2}{+\infty + 1} = +\infty + \ln 4 + 0 = +\infty$$

Quindi $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Calcoliamo $\lim_{x \to -\infty}$

$$\lim_{x \to -\infty} x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1} = -\infty + \ln 4 + \frac{2}{e^{-\infty}+1} \qquad (3)$$

per il grafico di $e^x \Rightarrow e^{-\infty} \to 0$

da 3

$$= -\infty + \ln 4 + \frac{2}{1} = -\infty + \ln 4 + 2 = -\infty$$

Quindi $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Vediamo chi è $f(-x)$

$$f(-x) = -x + \ln 4 + \frac{2}{e^{-x}+1}$$

Calcoliamo $f(x) + f(-x)$

$$\cancel{x} + \ln 4 + \frac{2}{e^{x}+1} - \cancel{x} + \ln 4 + \frac{2}{e^{-x}+1} =$$

$$= 2\ln 4 + \frac{2}{e^{x}+1} + \frac{2}{e^{-x}+1} =$$ calcoliamo il m.c.m tra

le 2 frazioni

$$= 2\ln 4 + \frac{2(e^{-x}+1) + 2(e^{x}+1)}{(e^{x}+1)(e^{-x}+1)} = 2\ln 4 + \frac{2[e^{-x}+1+e^{x}+1]}{(e^{x}+1)(e^{-x}+1)} =$$

$$= 2\ln 4 + \frac{2[e^{-x}+e^{x}+2]}{e^{x}\cdot e^{-x}+e^{x}+e^{-x}+1} =$$

$$= 2\ln 4 + \frac{2(e^{-x}+e^{x}+2)}{e^{x-x}+e^{x}+e^{-x}+1} =$$

$$= 2\ln 4 + \frac{2(e^{-x}+e^{x}+2)}{e^{0}+e^{x}+e^{-x}+1} = 2\ln 4 + \frac{2(e^{-x}+e^{x}+2)}{1+e^{x}+e^{-x}+1} =$$

$$= 2\ln 4 + \frac{2\cancel{(e^{-x}+e^{x}+2)}}{\cancel{(e^{-x}+e^{x}+2)}} = 2\ln 4 + 2$$

In definitiva abbiamo trovato che

$$f(x) + f(-x) = 2 + 2\ln 4 \qquad (4)$$

Visto che dobbiamo fare considerazioni sul punto

$A \equiv (0; 1 + \ln 4)$

possiamo dire che $\quad f(0) = 1 + \ln 4 \qquad (5)$

Scriviamo in modo diverso $f(x) + f(-x)$

$$f(x) + f(-x) = 2(1 + \ln 4) = 2 \cdot f(0)$$

si ha che i punti $P_1 \equiv (x, f(x))$ e $P_2 \equiv (-x, f(-x))$ sono simmetrici rispetto al punto A quindi A è centro di simmetria di Γ

Punto 2

Calcoliamo la y'

$$y' = \left(x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1}\right)' = 1 + 0 + \left(\frac{2}{e^x+1}\right)' =$$

$$= 1 + \frac{0\cdot(e^x+1) - 2\cdot e^x}{(e^x+1)^2} = 1 + \frac{-2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$y' = 1 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} \qquad (6)$$

Studiamo $y' > 0$

$$1 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0 \; ; \; \frac{(e^x+1)^2 - 2e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

$D(x)$ è sempre > 0, studiamo soltanto $N(x) > 0$

$$(e^x+1)^2 - 2e^x > 0 \; ; \; e^{2x} + 1 + 2e^x - 2e^x > 0$$

$$e^{2x} + 1 + 2e^x > 2e^x$$

E' evidente che il primo membro (che contiene il secondo membro) è sempre maggiore del 2° membro

$\Rightarrow N(x) > 0$ sempre. $\forall x \in \mathbb{R}$

Quindi $y' > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies$ ⑤

la funzione è sempre crescente.

Ricordando adesso che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ e

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se è sempre crescente ed essendo

funzione continua per l'esistenza di tutti i

valori intermedi si ha che $f(x) = m$ ha almeno

una soluzione. Inoltre essendo sempre crescente

tale soluzione è unica.

Nella traccia si ammette che α è la soluzione

di $f(x) = 3$ cioè si ammette che

$$f(\alpha) = 3 \quad (7)$$

In precedenza avevamo trovato un'importante

relazione

$$f(x) + f(-x) = 2 + 2\ln 4 \quad (4)$$

applichiamola ad α

$$f(\alpha)+f(-\alpha)=2+2\ln 4 \qquad (8)$$

inoltre stiamo supponendo che $f(\alpha)=3$

la (8) diviene

$$3+f(-\alpha)=2+2\ln 4$$

$$f(-\alpha)=2+2\ln 4-3\,; \qquad f(-\alpha)=2\ln 4-1 \qquad (9)$$

ciò ci fa capire che se $m=2\ln 4-1 \Rightarrow$

$-\alpha$ è soluzione . .

Punto 3

Sostanzialmente si deve provare che

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1}$$ è uguale a

$$f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x+1}$$

sottraiamo membro a membro se otteniamo un'identità abbiamo provato che la $f(x)$ è scrivibile in 2 forme diverse.

$$f(x) - f(x) = \cancel{x} + \cancel{\ln 4} + \frac{2}{e^x+1} - \cancel{x} - 2 - \cancel{\ln 4} + \frac{2e^x}{e^x+1}$$

$$0 = \frac{2}{e^x+1} - 2 + \frac{2e^x}{e^x+1} \, ;$$

$$0 = \frac{2 - 2(e^x+1) + 2e^x}{e^x+1} \, ;$$

$$0 = \frac{\cancel{2} - 2\cancel{e^x} - \cancel{2} + 2\cancel{e^x}}{e^x+1} \, ; \quad 0 = 0 \quad \text{Ok.}$$

Uguaglianza provata.

$R: \quad y = x + \ln 4$

$S: \quad y = x + 2 + \ln 4$

dobbiamo provare che sono asintoti di Γ

Sia R che S sono rette inclinate $y = mx + q$

quindi potrebbero essere asintoti obliqui

Sappiamo che $m_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ e

$q_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx \right]$

Analogamente si deve procedere per $-\infty$ per determinare m_2 e q_2.

$\cancel{m_1 =}$

$$m_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{\ln 4}{x} + \frac{\frac{2}{e^x+1}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{\ln 4}{x} + \frac{2}{x(e^x+1)} =$$

$$= 1 + \frac{\ln 4}{+\infty} + \frac{2}{+\infty(e^{+\infty}+1)} =$$

$$= 1 + 0 + \frac{2}{+\infty \cdot (+\infty)} = 1 + 0 + \frac{2}{+\infty} =$$

$$= 1 + 0 + 0 = 1 \implies$$

$$m_1 = 1$$

Calcoliamo q_1

$$q_1 = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\cancel{x} + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1} - \cancel{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\ln 4 + \frac{2}{e^x+1} \right) =$$

$$= \ln 4 + \frac{2}{e^{+\infty}+1} = \ln 4 + \frac{2}{+\infty+1} =$$

$$= \ln 4 + 0 = \ln 4$$

Un asintoto obliquo è $\boxed{y = x + \ln 4}$

Determiniamo l'altro asintoto obliquo

Calcoliamo

$$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{\ln 4}{x} + \frac{\frac{2}{e^x+1}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{\ln 4}{x} + \frac{2}{x(e^x+1)} =$$

$$= 1 + \frac{\ln 4}{-\infty} + \frac{2}{-\infty(e^{-\infty}+1)} =$$

$$= 1 + 0 + \frac{2}{-\infty(0+1)} = 1+0+\frac{2}{-\infty(1)} =$$

$$= 1 + 0 + \frac{2}{-\infty} = 1+0+0 \Rightarrow$$

$$m_2 = 1$$

Calcoliamo q_2

$$q_2 = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - x\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\cancel{x} + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1} - \cancel{x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\ln 4 + \frac{2}{e^x+1}\right) = \ln 4 + \frac{2}{e^{-\infty}+1} =$$

$$= \ln 4 + \frac{2}{0+1} = \ln 4 + 2$$

$q_2 = \ln 4 + 2$

L'asintoto è $y = x + \ln 4 + 2$

Punto 4_β

Sia $I(\beta) = \int_0^\beta \left[f(x) - x - \ln 4 \right] dx =$

$$= \int_0^\beta \cancel{x} + \cancel{\ln 4} + \frac{2}{e^x+1} - \cancel{x} - \cancel{\ln 4} \; dx =$$

$$= \int_0^\beta \frac{2}{e^x+1} \, dx = \int_0^\beta \frac{2+2e^x-2e^x}{e^x+1} \, dx =$$

abbiamo aggiunto e sottratto $2e^x$

$$= \int_0^\beta \frac{2+2e^x}{e^x+1} \, dx + \int_0^\beta \frac{-2e^x}{e^x+1} \, dx =$$

$$= \int_0^\beta \frac{2(\cancel{1+e^x})}{\cancel{e^x+1}} \, dx - 2 \int_0^\beta \frac{e^x}{e^x+1} \, dx =$$

$$= 2 \int_0^\beta dx - 2 \left[\ln|e^x+1| \right]_0^\beta =$$

$$= 2\left[x\right]_0^\beta - 2\left[\ln|e^x+1|\right]_0^\beta =$$

$$= 2(\beta - 0) - 2\left(\ln|e^\beta+1| - \ln|e^0+1|\right) =$$

$$= 2\beta - 2\left(\ln|e^\beta+1| - \ln|1+1|\right) =$$

$$= 2\beta - 2\left(\ln|e^\beta+1| - \ln 2\right) =$$

$$= 2\beta + 2\ln 2 - 2\ln|e^\beta+1| \quad *1$$

In definitiva

$$I(\beta) = 2\beta + 2\ln 2 - 2\ln|e^\beta+1|$$

Studiamo $\lim_{\beta \to +\infty} I(\beta)$

$$\lim_{\beta \to +\infty} 2\beta + 2\ln 2 - 2\ln|e^\beta+1| =$$

$$= +\infty + 2\ln 2 - 2\ln|e^{+\infty}+1| =$$

$$= +\infty + 2\ln 2 - 2\ln|+\infty + 1| =$$

$$= +\infty + 2\ln 2 - 2\ln|+\infty| = \cancel{+\infty} + 2\ln 2 - \cancel{\infty} =$$

$$= 2\ln 2$$

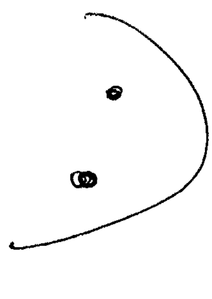
cioè

$$\lim_{\beta \to +\infty} I(\beta) = 2\ln 2 .$$

Geometricamente significa che l'area sottesa dalla curva $f(x) = \frac{2}{e^x + 1}$

mentre la curva va all'infinito vale

$2\ln 2$



*1

Altro modo per calcolare l'integrale

$$\int \frac{2}{e^x+1}\,dx = 2\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$$

Studiamo $\int \frac{1}{e^x+1}\,dx$ poniamo $e^x = t$

da cui $e^x\,dx = dt$

$$dx = \frac{dt}{e^x}$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{1}{t+1} \cdot \frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{t^2+t}\,dt$$

Δ del denominatore $\Delta = 1-4(1)(0) = 1$

troviamo le soluzioni del denominatore

$t^2+t=0$ $t(t+1)=0$ $t=0$

$t+1=0$; $t=-1$

Per la decomposizione secondo Cartesio si ha :

$$t^2+t=(t-0)(t-(-1))=(t-0)(t+1)$$

$$\frac{1}{t^2+t}=\frac{1}{(t-0)(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}$$

$$\frac{A(t+1)+Bt}{t(t+1)}=\frac{At+A+Bt}{t(t+1)}=\frac{t(A+B)+A}{t(t+1)}$$

Se il numeratore deve essere 1 si deve imporre che

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 1+B=0 \\ A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-1 \\ A=1 \end{cases}$$

Da cui

$$\frac{1}{t^2+t}=\frac{1}{t}+\frac{-1}{t+1}$$

$$\frac{1}{t^2+t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \Longrightarrow$$

$$\int \frac{1}{t^2+t}\, dt = \int \frac{1}{t}\, dt - \int \frac{1}{t+1}\, dt =$$

$$= \ln|t| - \ln|t+1|$$

torniamo alla sostituzione

$$\cancel{\ln e^x} - \ln(e^x+1) = x - \ln(e^x+1)$$

Riassumiamo

$$\int \frac{2}{e^x+1}\, dx = 2\int \frac{1}{e^x+1}\, dx = 2\left[x - \ln(e^x+1)\right] =$$

$$= 2x - 2\ln(e^x+1)$$

ovviamente è
lo stesso risultato cui si è pervenuti