www.francescozumbo.it

"La Matematica e la Fisica per Tutti in e-Learning"

Prof. Francesco Zumbo

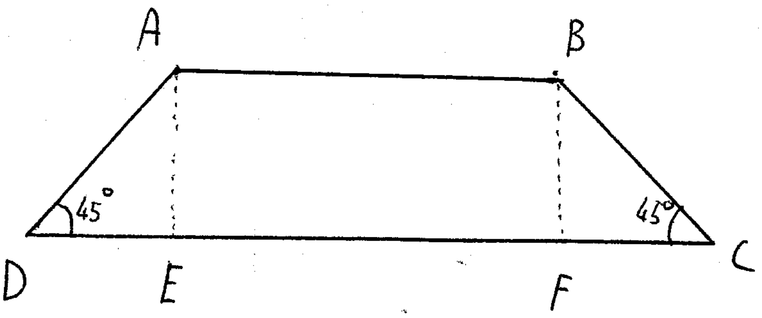
email zumbo2008@yahoo.it

Problemi di Massimo e di Minimo

"Sia ABCD un trapezio isoscele di area S^2 e con angoli adiacenti alla base di 45°. Determina l'altezza del trapezio in modo che abbia perimetro minimo."

Problema di Massimo e di Minimo

Sia ABCD un trapezio isoscele di area S^2 e con gli angoli adiacenti alla base di 45°.
Determina l'altezza del trapezio in modo che abbia perimetro minimo.



Poniamo l'altezza $\overline{AE} = \overline{BF} = x$

Per i teoremi goniometrici sui triangoli rettangoli

$$x = \overline{AD} \cdot \sin 45^\circ \ ; \quad x = \overline{AD} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \ ; \quad 2x = \overline{AD} \cdot \sqrt{2}$$

$$\frac{2x}{\sqrt{2}} = \overline{AD}$$

Da cui si ha: $AD = BC = \dfrac{2x}{\sqrt{2}}$

Inoltre si osserva che $\overline{DE} = \overline{CF}$ e che

$$\overline{DE} = \overline{AD} \cdot \cos 45^\circ \ ; \quad \overline{DE} = \frac{2x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = x$$

$\overline{DE} = x$ ed anche $\overline{AE} = x$

Per la formula dell'area del trapezio

$$A = \frac{(DC + AB)}{2} \cdot (AE)$$

Adattate ai nostri dati si ottiene

$$S^2 = \frac{(DC + AB)}{2} \cdot x$$

La base maggiore $\overline{DC}$ la possiamo scrivere

$$\overline{DC} = \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FC} = \overline{EF} + 2\overline{DE} = \overline{EF} + 2X =$$

$$= AB + 2x \quad \text{cioè}$$

$$\overline{DC} = \overline{AB} + 2x$$

In tal modo la formula dell'area diviene

$$S^2 = \frac{[(AB + 2x) + AB]}{2} \cdot x$$

Il valore dell'area "S^2" lo tratteremo come un parametro.

$$S^2 = \frac{2\overline{AB} + 2x}{2} \cdot x = \frac{\cancel{2}(\overline{AB} + x)}{\cancel{2}} \cdot x =$$

$$= (\overline{AB} + x) \cdot x = \overline{AB} \cdot x + x^2$$

$$S^2 = \overline{AB} \cdot x + x^2$$

Ricaviamo la base minore $\overline{AB}$ in funzione di x.

$$\overline{AB} = \frac{S^2 - x^2}{x}$$

A questo punto calcoliamo il perimetro

$$\overline{P} = \overline{DC} + \overline{AD} + \overline{AB} + \overline{BC}$$

Con $\overline{DC} = \overline{AB} + 2\overline{DE} = \overline{AB} + 2x = \dfrac{S^2 - x^2}{x} + 2x$;

$$\overline{AD} = \frac{2x}{\sqrt{2}} \; ; \; \overline{BC} = \frac{2x}{\sqrt{2}} \; ; \; \overline{AB} = \frac{S^2 - x^2}{x}$$

$$P = \frac{S^2 - x^2}{x} + 2x + \frac{2x}{\sqrt{2}} + \frac{2x}{\sqrt{2}} + \frac{S^2 - x^2}{x} =$$

$$= 2 \cdot \frac{(S^2 - x^2)}{x} + 2x + 2 \cdot \frac{2x}{\sqrt{2}} =$$

$$= 2 \cdot \frac{(S^2 - x^2)}{x} + 2x + \frac{4x}{\sqrt{2}}$$

Poniamo $y = P$ (Perimetro)

$$y = \frac{2S^2 - 2x^2}{x} + 2x + \frac{4x}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{2S^2}{x} - \frac{2x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} + 2x + \frac{4x}{\sqrt{2}}$$

$$y = 2S^2 \cdot x^{-1} - \cancel{2x} + \cancel{2x} + \frac{4x}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{y = 2S^2 \cdot x^{-1} + \frac{4x}{\sqrt{2}}}$$

Perimetro in funzione dell'altezza x

Calcoliamo la derivata prima $y'(x)$

$$y'(x) = 2S^2 \cdot \left((-1)\, x^{-2}\right) + \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$y' = \frac{-2S^2}{x^2} + \frac{4}{\sqrt{2}}$$

Per calcolare quali sono i punti di Massimo o di Minimo studiamo l'equazione $y' = 0$

$$\frac{-2S^2}{x^2} + \frac{4}{\sqrt{2}} = 0;$$ Ricaviamo le x

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{2S^2}{x^2}; \quad 4 \cdot x^2 = 2\sqrt{2} \cdot S^2;$$

$$2x^2 = \sqrt{2}\, S^2; \quad x^2 = \frac{\sqrt{2} \cdot S^2}{2};$$

$$x^2 = \frac{\cancel{\sqrt{2}} \cdot S^2}{\cancel{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}}; \quad x^2 = \frac{S^2}{\sqrt{2}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{S^2}{\sqrt{2}}} = \pm \frac{S}{\sqrt[4]{2}}$$

$$x_1 = \frac{S}{\sqrt[4]{2}} \quad e \quad x_2 = -\frac{S}{\sqrt[4]{2}}$$

Osserviamo che x_1 e x_2 sono due altezze e non ha senso parlare di altezze negative, quindi l'unico valore da prendere in considerazione è $x_1 = \frac{S}{\sqrt[4]{2}}$

Studiamo il segno della derivata prima

$y' > 0$

$$-\frac{2S^2}{x^2} + \frac{4}{\sqrt{2}} > 0 \,;$$

$$\frac{-2\sqrt{2}\,S^2 + 4x^2}{\sqrt{2}\,x^2} > 0 \,. \quad D(x) \text{ è } (+) \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Studiamo $N(x) > 0$

$$-2\sqrt{2}\,S^2 + 4x^2 > 0 \,; \quad 4x^2 - 2\sqrt{2}\,S^2 > 0 \,;$$

$$2x^2 - \sqrt{2}\,S^2 > 0 \,; \quad \Delta = 0 - 4(2)(-\sqrt{2}\,S^2) =$$

$$= 8\sqrt{2}\,S^2$$

$$\Delta = \sqrt{128}\,S^2 > 0$$

Famiglie > 0 e $\Delta > 0$ implica soluzioni positive all'esterno e soluzioni negative all'interno delle soluzioni dell'equazione associata

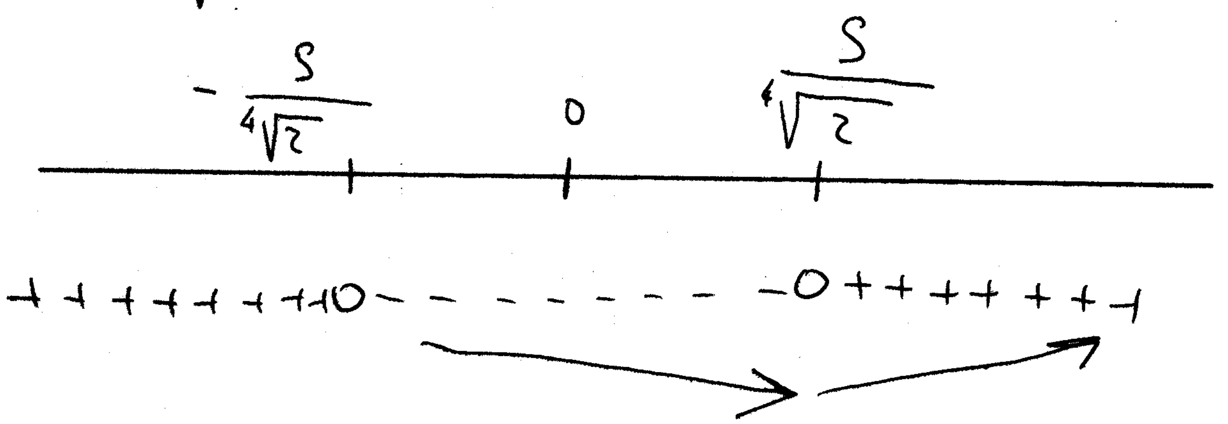
Calcoliamo le soluzioni dell'equazione associata

$$2x^2 - \sqrt{2}\, S^2 = 0 \; ; \quad 2x^2 = \sqrt{2}\, S^2 \; ; \quad x^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} S^2$$

$$x^2 = \sqrt{\frac{2}{4}} \cdot S^2 \; ; \quad x^2 = \sqrt{\frac{1}{2}}\, S^2$$

$$x = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \cdot S = \pm \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[4]{2}} \cdot S$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}} S$$



$x = \frac{S}{\sqrt[4]{2}}$ è l'altezza rispetto alla quale si assume il Perimetro Minimo :)