www.francescozumbo.it

"La Matematica e la Fisica per Tutti in e-Learning"

Prof. Francesco Zumbo

email zumbo2008@yahoo.it

Problemi di Massimo e di Minimo

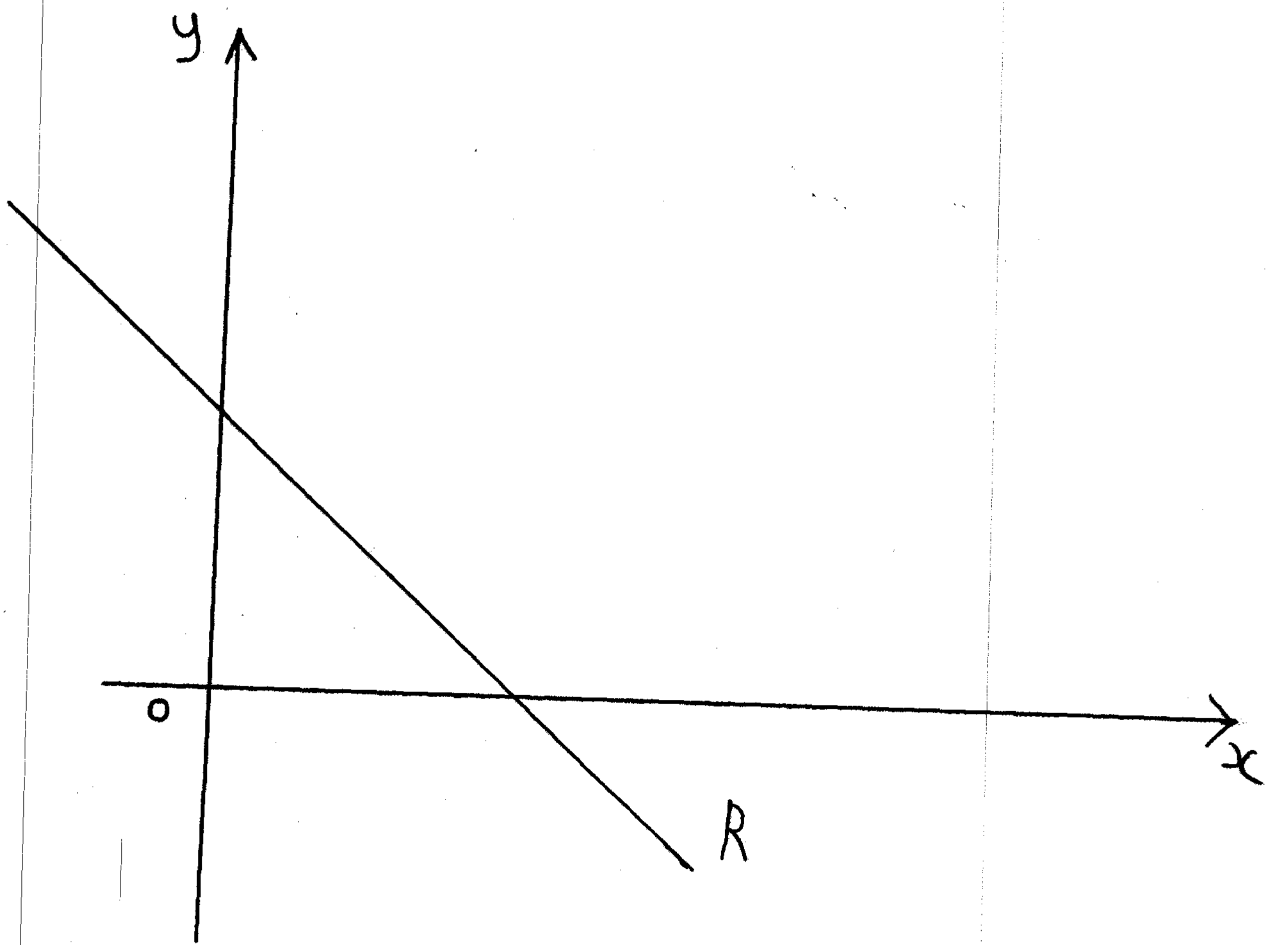
"Individua il punto della retta $2x+y-5=0$ per il quale è minima la distanza dall'origine degli assi."

Problema di Massimo e di Minimo

Individua il punto della retta $R: 2x + y - 5 = 0$ per il quale è minima la distanza dall'origine degli assi.

Soluzione

Tracciamo un ipotetico grafico che potrebbe rappresentare il nostro problema



Calcoliamo la y dall'equazione della retta

$$y = -2x + 5 \qquad (1)$$

Il generico punto appartenente alla retta ha coordinate $P \equiv (x\,;\,-2x+5)$

Calcoliamo la distanza $\overline{PO}$

$$\overline{PO} = \sqrt{(x-0)^2 + (-2x+5-0)^2} = \sqrt{x^2 + (-2x+5)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + 4x^2 + 25 - 20x} = \sqrt{5x^2 - 20x + 25}$$

La distanza del generico punto P, all'origine, in funzione di x è:

$$\overline{PO}(x) = d(x) = y = \sqrt{5x^2 - 20x + 25} \qquad (2)$$

A questo punto dobbiamo calcolare il Minimo della funzione (2)

Calcoliamo la $y'(x)$

$$y = (5x^2 - 20x + 25)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2}(5x^2 - 20x + 25)^{-\frac{1}{2}} \cdot (10x - 20) =$$

$$= \frac{10x - 20}{2\sqrt{5x^2 - 20x + 25}} = \frac{\cancel{2}(5x - 10)}{\cancel{2}\sqrt{5x^2 - 20x + 25}},$$

$$y' = \frac{5x - 10}{\sqrt{5x^2 - 20x + 25}} \quad (3)$$

I punti x candidati ad essere di MAX o di Min sono quelli per cui $y' = 0$

$$\frac{5x - 10}{\sqrt{5x^2 - 20x + 25}} = 0 \quad (4)$$

Noi, sappiamo bene che, una frazione vale 0 se e solo se $N(x)=0$, per cui studiamo

$$5x-10=0 \; ; \; 5x=10 \; ; \; x=2$$

Per capire se $x=2$ è un punto di MAX o di Min o di flesso a tangente orizzontale dobbiamo studiare il segno della derivata prima.

Studiamo $y'>0$, cioè

$$\frac{5x-10}{\sqrt{5x^2-20x+25}}>0 \qquad (5)$$

$N(x)>0$

$$5x-10>0 \; ; \; 5x>10 \; ; \; x>2$$

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 5 & \\ - - - - - - & - - - - - & 0 + + + + + + + + & N(x) \end{array}$$

$D(x) > 0$

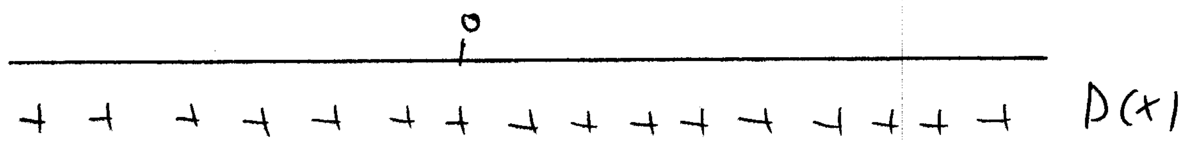
$$\sqrt{5x^2-20x+25} > 0 \qquad (6)$$

Questa disequazione irrazionale equivale a studiare

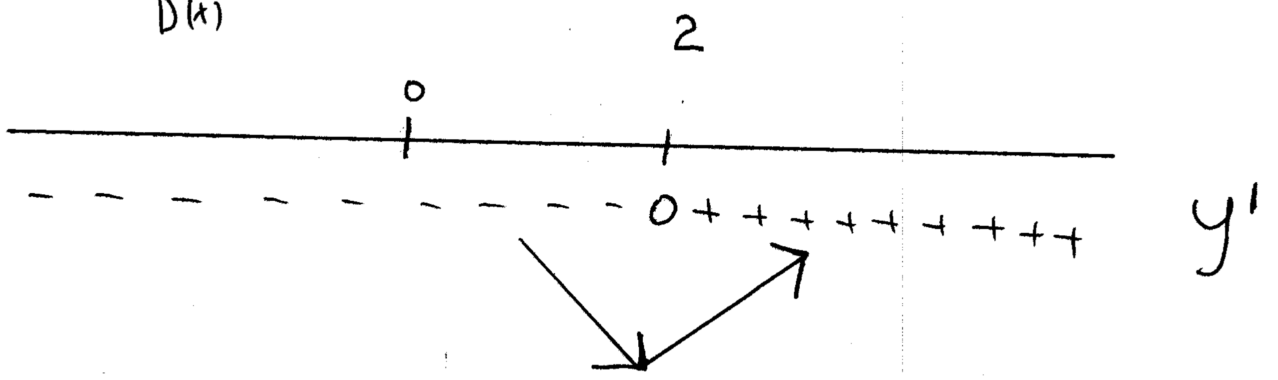
(7) $5x^2-20x+25>0$; $x^2-4x+5>0$

$\Delta = 16-4(1)(5) = 16-20 = -4 < 0$

Per cui la (7) è (+) $\forall x \in \mathbb{R}$



Da cui $\frac{N(x)}{D(x)}$ è



Per cui $x = 2$ è punto di Minimo.

Calcoliamo la y corrispondente

$$y(2) = 5 - 2X = 5 - 2 \cdot 2 = 1$$

Da cui si ha che il punto (x, y) appartenente alla retta $2X + y - 5 = 0$ a distanza minima dall'origine è il punto $P \equiv (2; 1)$