Www.francescozumbo.it

“La Matematica e la Fisica per Tutti in e-Learning”

Prof. Francesco Zumbo

email zumbo2008@yahoo.it

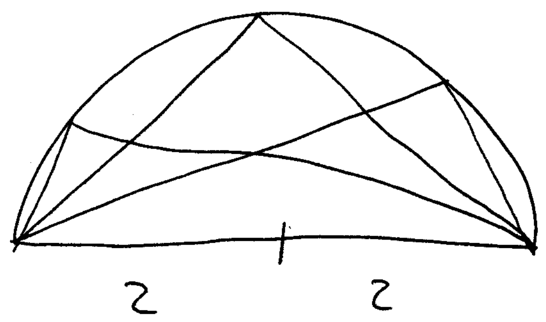
Problemi di Massimo e di Minimo

“Determinare tra tutti i triangoli inscritti in una semicirconferenza di raggio 2 , quello avente il perimetro massimo”

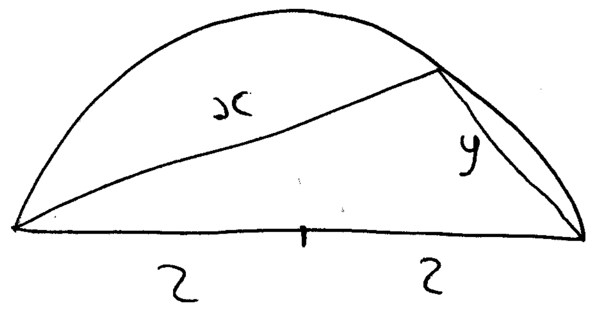
Problema di Massimo e Minimo

Determinare tra tutti i triangoli inscritti in una semicirconferenza di raggio 2, quello avente il perimetro massimo.

Soluzione



Ricordiamo che tutti i triangoli inscritti in una semicirconferenza sono Rettangoli.



Il perimetro vale:

$$P = x + y + 4 \qquad (1)$$

Al momento tale formula non è conveniente perché ci sono 2 variabili: x e y.

Ma noi sappiamo che il triangolo è rettangolo quindi possiamo utilizzare il Teorema di Pitagora

$$x^2 + y^2 = 4^2 \qquad (2)$$

Ricaviamo la y dalla (2)

$$y^2 = 16 - x^2 \, ; \quad y = \sqrt{16 - x^2} \qquad (3)$$

Sostituiamo la (3) nella formula del perimetro

$$P = x + \sqrt{16 - x^2} + 4 \qquad (4)$$

A questo punto il perimetro è in funzione di x

$$P(x) = x + \sqrt{16 - x^2} + 4$$

$$y = x + \sqrt{16 - x^2} + 4 \qquad (4)$$

a questo punto il nostro problema si trasforma nel calcolare il Massimo della funzione (4).

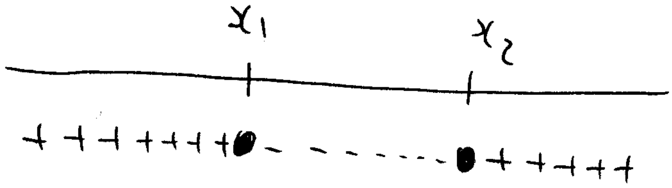
Calcoliamo intanto il Campo di Esistenza

$$C.E. = 16 - x^2 \geq 0$$

(*) $-x^2 + 16 \geq 0$; moltiplichiamo per (-1)

(**) $x^2 - 16 \leq 0$; $\Delta = b^2 - 4ac$; $\Delta = 0 - 4(1)(-16) = 64 > 0$

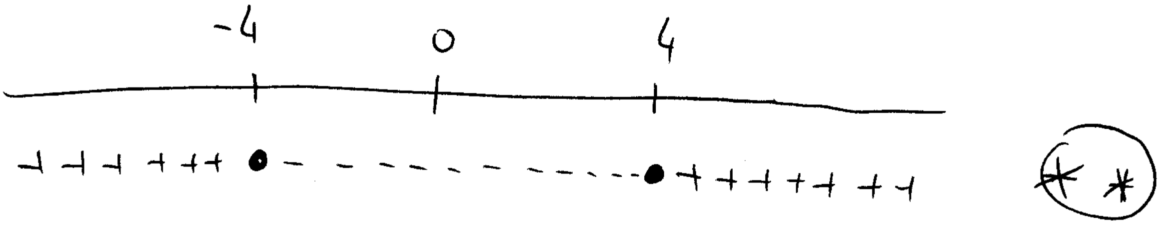
La (**) quindi appartiene alla famiglia ≤ 0 con $\Delta > 0$ per cui le soluzioni negative sono dentro le radici dell'equazione associata.



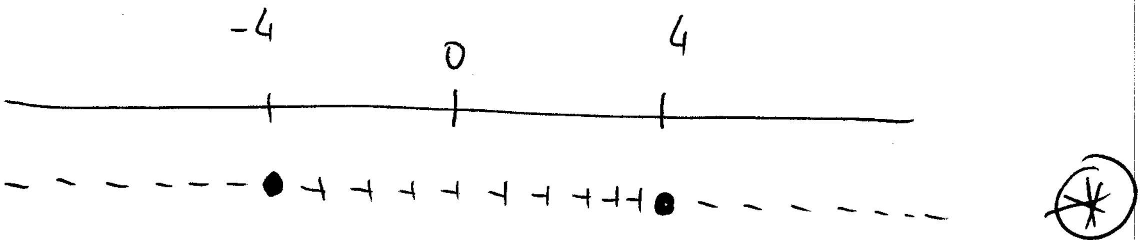
Calcoliamo x_1 e x_2

$x^2 - 16 = 0$; $x^2 = 16$; $x = \pm 4$ $\quad x = \begin{cases} +4 \\ -4 \end{cases}$

Per cui la (**) ha soluzione



Noi non vogliamo la soluzione di (**) ma la soluzione di (*) per cui dobbiamo moltiplicare il grafico per (-1)



In definitiva il Campo di Esistenza (CE) è

$$[-4;4] \quad ; \quad -4 \le x \le 4$$

Per calcolare il Massimo della funzione (4) calcoliamo la derivata prima.

(4) $\quad y = x + \sqrt{16-x^2} + 4$

(5) $\quad y = x + (16-x^2)^{\frac{1}{2}} + 4$

Calcoliamo preventivamente la derivata di

$$\left[(16-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(16-x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (-2x) =$$

$$= \frac{1}{2}(16-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{16-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}$$

oppure calcoliamo la derivata di

$\left[(16-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]'$ con il teorema di Leibniz e Newton

$$x \longrightarrow a = 16-x^2 \longrightarrow b = a^{\frac{1}{2}}$$

$$a' = -2x \quad ; \quad b' = \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(16-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{16-x^2}}$$

per cui

$$a' \cdot b' = (-2x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{16-x^2}} = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{16-x^2}} =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}$$

Ritorniamo all'intera derivata della (5)

$$y' = 1 + \frac{-x}{\sqrt{16-x^2}} + 0$$

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}} + 1 \qquad (6)$$

I punti candidati ad essere di Massimo o di Minimo sono quei punti rispetto ai quali si annulla la derivata prima.

Per cui ci studiamo

$$y' = 0$$

$$-\frac{x}{\sqrt{16-x^2}} + 1 = 0$$

$$\frac{-x+\sqrt{16-x^2}}{\sqrt{16-x^2}} = 0 \; ; \quad \sqrt{16-x^2} - x = 0$$

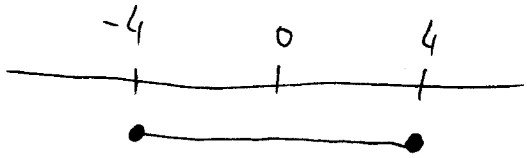
$$\sqrt{16-x^2} = x \qquad (7)$$

Risolvere la (7) equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} 16-x^2 = x^2 \\ 16-x^2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 16-x^2-x^2=0 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} -2x^2 = -16 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 = 16 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 8 \\ - \end{cases}$$

$$x = \pm\sqrt{8} \; ; \quad x = \pm 2\sqrt{2} \; ; \quad x_1 = 2\sqrt{2} \text{ e } x_2 = -2\sqrt{2}$$

$16-x^2 \geq 0$ la avevamo già studiata (esistenza) ed aveva soluzioni



entrambi i valori $x_1 = 2\sqrt{2}$ e $x_2 = -2\sqrt{2}$

sono interni a tale intervallo.

In definitiva i punti $x_1 = 2\sqrt{2}$ e $x_2 = -2\sqrt{2}$ sono candidati ad essere i punti di Massimo e/o di Minimo.

Per capire ciò occorre studiare il segno della derivata prima.

Studiamo il segno di

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}} + 1$$

$$y' > 0$$

$$-\frac{x}{\sqrt{16-x^2}} + 1 > 0$$

$$\frac{-x + \sqrt{16-x^2}}{\sqrt{16-x^2}} > 0$$

Studiamo $N(x) > 0$

$$-x + \sqrt{16-x^2} > 0;$$

$$\sqrt{16-x^2} > x$$

Questa disequazione appartiene alla famiglia

$$\sqrt{A(x)} > B(x)$$

che si studia risolvendo:
(essendo n-pari)

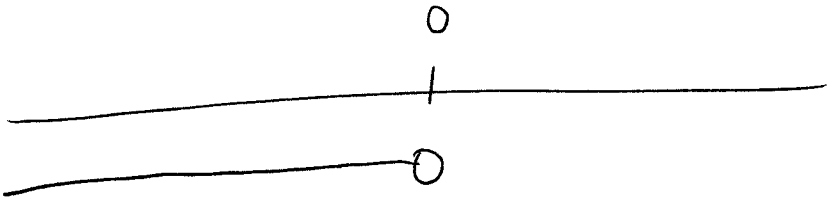
$$\begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^{n\text{-pari}} \end{cases}$$

Nel nostro caso diventa

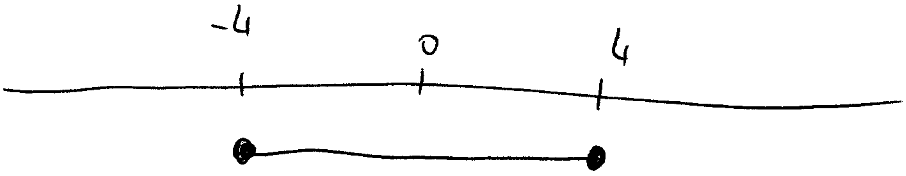
$$\begin{cases} x < 0 \\ 16-x^2 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ 16-x^2 > x^2 \end{cases}$$

1ª

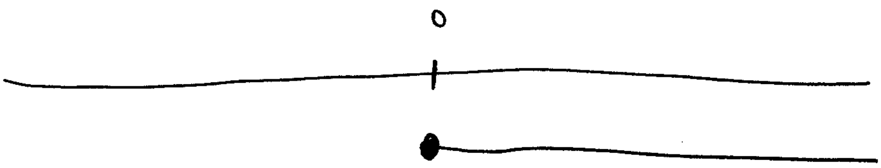
$x < 0$



2ª $16 - x^2 \geq 0$ le abbiamo già risolte nel campo di esistenza



3ª



4ª

$16 - x^2 - x^2 > 0$; $-2x^2 + 16 > 0$

$-x^2 + 8 > 0$ *

Moltiplichiamo per (−1)

$x^2-8<0$ (**)

$\Delta = b^2-4ac = 0-4(1)(-8) = +32 > 0$

Calcoliamo le soluzioni con l'equazione associata

$x^2-8=0$; $x^2=8$; $x=\pm\sqrt{8}$; $x=\pm 2\sqrt{2}$;

$x_1 = 2\sqrt{2}$ e $x_2 = -2\sqrt{2}$

La (**) è della famiglia <0 con $\Delta>0$

quindi le soluzioni sono interne

$-2\sqrt{2}$ $\quad$ 0 $\quad$ $2\sqrt{2}$

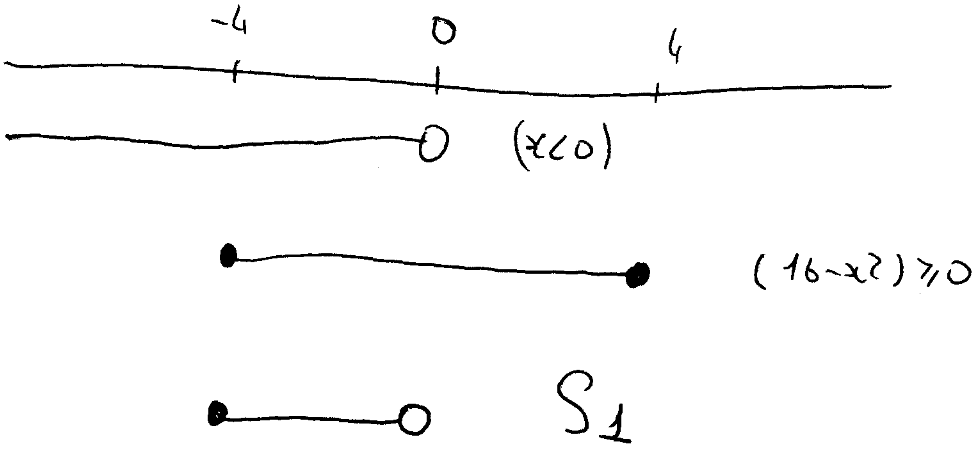
+ + + + + + + 0 − − − − − − − − 0 + + + + + + $\quad$ (**)

Da cui (*) si ottiene moltiplicando il grafico di (**) per (−1)

− − − − − − − − − 0 + + + + + 0 − − − − − − $\quad$ (*)

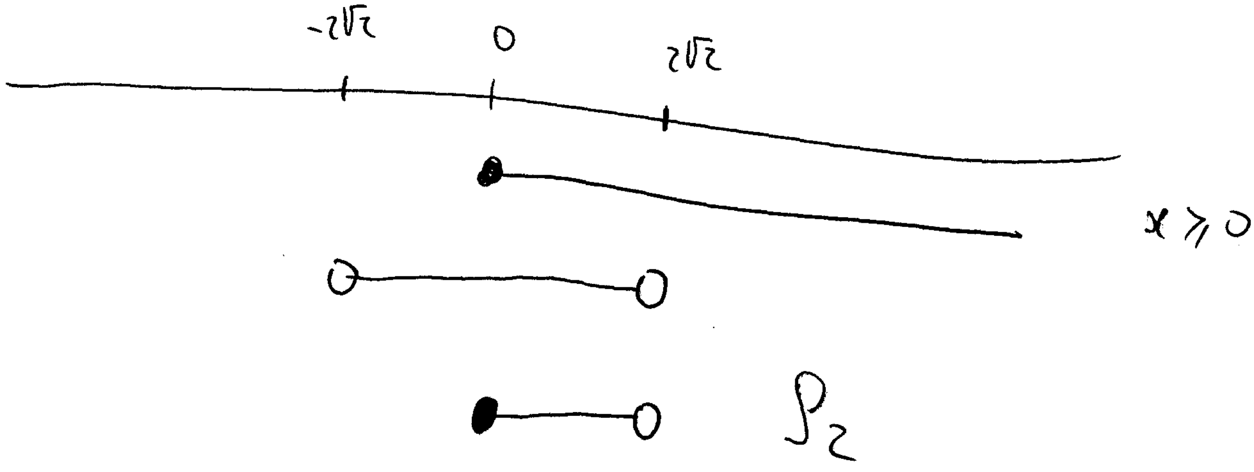
(*) cioè $-x^2+8>0$

Calcoliamo l'intersezione del 1° sistema

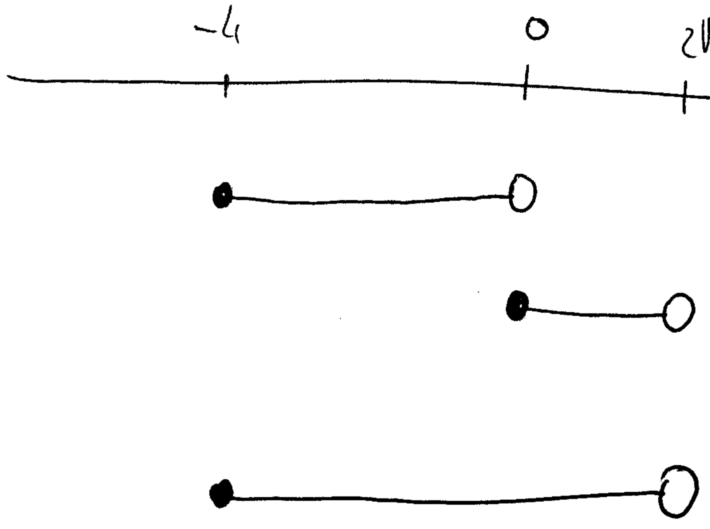


$[-4;0[\quad S_1$

Calcoliamo l'intersezione del 2° sistema



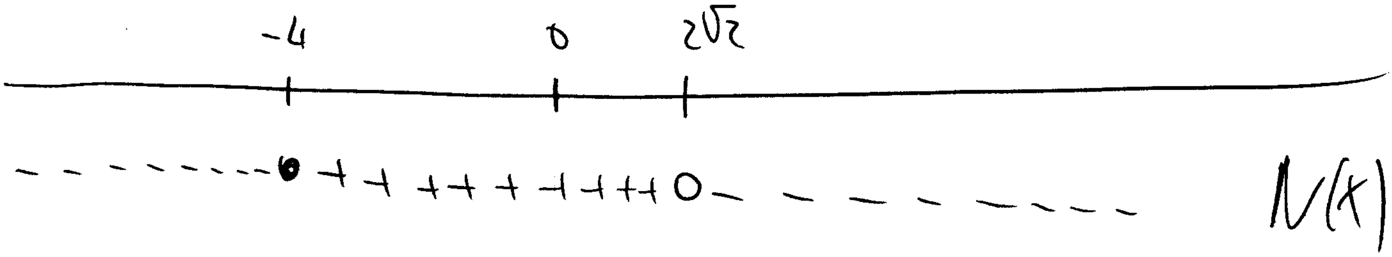
Calcoliamo $S_1 \cup S_2$



$S_1 \cup S_2$

Ma $S_1 \cup S_2$ era lo studio di $N(x) > 0$

Per cui il segno di $N(x)$ è



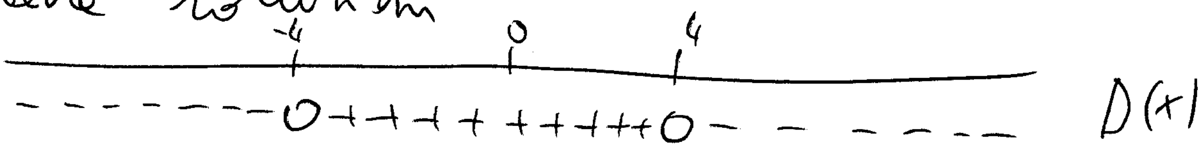
Studiamo $D(x) > 0$

$$\sqrt{16-x^2} > 0$$

che equivale a studiare $16-x^2 > 0$

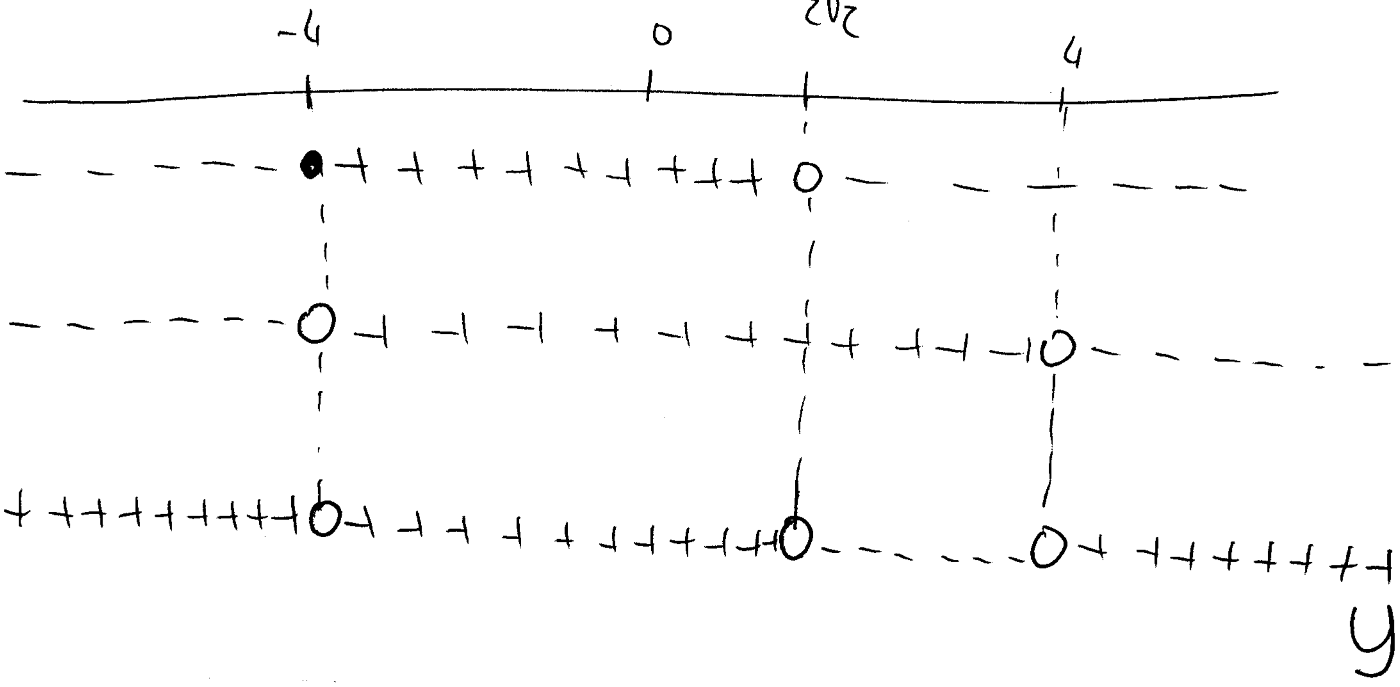
che abbiamo già studiato nell'esistenza

e avevamo soluzioni

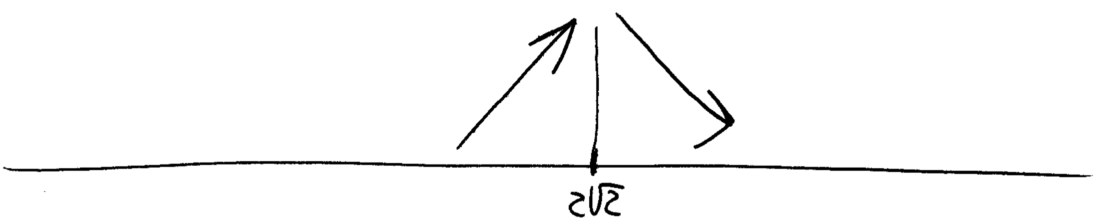


Studiamo a questo punto il rapporto

$$\frac{N(x)}{D(x)}$$



Per cui in corrispondenza del punto $x=2\sqrt{2}$ si ha che la derivata prima è:



per cui $x=2\sqrt{2}$ è un punto di Massimo.

Quindi possiamo affermare che il perimetro massimo si ottiene per $x = 2\sqrt{2}$.

Calcoliamo tale perimetro Massimo del triangolo inscritto in una semicirconferenza di raggio 2

$$P = 2\sqrt{2} + \sqrt{16\,(2\sqrt{2})^2} + 4 =$$

$$= 2\sqrt{2} + \sqrt{16 - 4 \cdot 2} + 4 = 2\sqrt{2} + \sqrt{16 - 8} + 4 =$$

$$= 2\sqrt{2} + \sqrt{8} + 4 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4 = 4\sqrt{2} + 4 = 4(\sqrt{2} + 1)$$

In definitiva il perimetro massimo vale

$$P = 4\sqrt{2} + 4$$