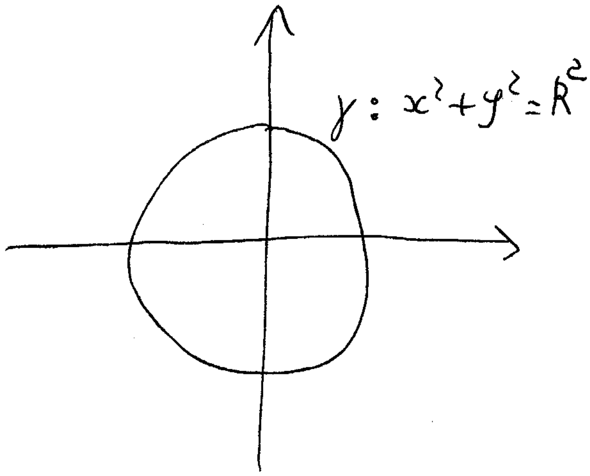
Lunghezza della circonferenza con il calcolo integrale



La lunghezza di una curva si calcola con la formula

$$l(x) = \int_a^x \sqrt{1+[f'(t)]^2}\; dt \qquad (1)$$

Scriviamo l'equazione della circonferenza come funzione

$$y^2 = R^2 - x^2 \; ; \quad y = \sqrt{R^2-x^2} \qquad (2)$$

studiamo l'esistenza di $y=\sqrt{R^2-x^2}$

imponiamo ≥ 0 l'argomento del radicale

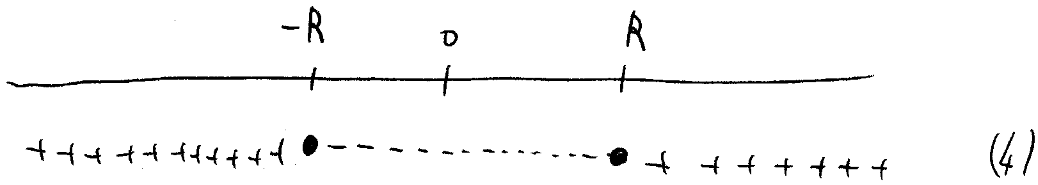
(3) $R^2 - x^2 \geq 0$; $-x^2 + R^2 \geq 0$; moltiplichiamo per (-1)

$x^2 - R^2 \leq 0$. (4)

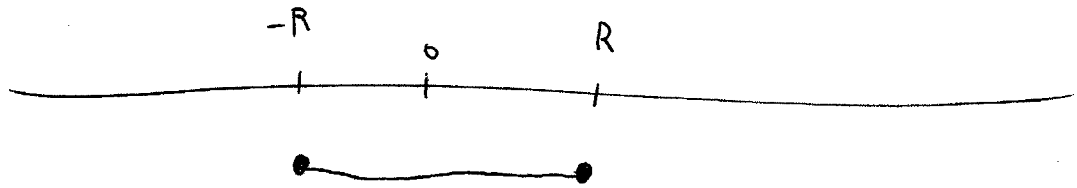
Studiamo l'equazione associata

$x^2 - R^2 = 0$; $x^2 = R^2$; $x = \pm R$; $x_1 = R$ e $x_2 = -R$

La (4) ha soluzioni:

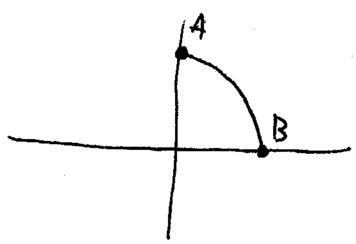


$\Rightarrow$ la (3) ha soluzioni:



Se integriamo (1) da $0 \leq x \leq R$

Calcoliamo



l'arco $\widehat{AB}$

Determiniamo $f'(x)$

$$y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} = (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (-2x) = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)^{\frac{1-2}{2}} \cdot (-2x) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\cancel{2}x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

In definitiva $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$

$$\widehat{AB} = \int_0^R \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}\, dx =$$

$$= \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = \int_0^R \sqrt{\frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= \int_0^R \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}}\, dx = \int_0^R \frac{\sqrt{R^2}}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= R\int_0^R \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx =$$

$$= R\left[\text{arc sen}\,\frac{x}{R}\right]_0^R = R\left[\text{arc sen}\,\frac{R}{R} - \text{arc sen}\,\frac{0}{R}\right] =$$

$$= R\left[\text{arc sen}\,1 - \text{arc sen}\,0\right] = R\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi}{2}\cdot R$$

In definitiva $\widehat{AB} = \frac{\pi}{2}\cdot R$

Lunghezza di $\gamma = 4\cdot\widehat{AB} = \overset{2}{\cancel{4}}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}}\cdot R = 2\pi R$

Lunghezza$(\gamma) = 2\pi R$:-)