La retta - Teorema di Talete - Equazione della retta: passante per due punti, implicita, esplicita - Parallele e Perpendicolari - Fascio Propio e improprio - Intersezione tra rette

Francesco Zumbo

www.francescozumbo.it

http://it.geocities.com/zumbof/

Questi appunti vogliono essere un ulteriore strumento didattico per gli studenti. Idea che mi é venuta dopo essere stato a contatto con bambini e studenti affetti da Sclerosi Multipla, costretti a lunghe degenze presso il Reparto di Neurologia dell'Ospedale di Fidenza (Parma), Divisione Diretta da una Eccezionale persona, il ***Prof. Enrico Montanari*** *a cui mia riconoscenza e stima andranno Sempre.*

A coloro che vorranno dare un piccolo contributo all'Associazione Nazionale per la Lotta Contro la Sclerosi Multipla (sezione di Parma) un Grande Grazie!!!

Conto Corrente Postale : 13 50 34 38 - Intestato a: AISM di Parma (Associazione Italiana Sclerosi Multipla) di Parma - Indirizzo: Piazzale S. Sepolcro, 3 - 43100 Parma (PR) - Telefono : 0521-231251.

Con la seguente Causale: **+ Matematica ,- Sclerosi Multipla**

1. Assi Cartesiani Ortogonali

Due assi si definiscono cartesiani ortogonali quando sono tra loro perpendicolari, cioé quando incontrandosi in un punto O detto origine degli assi, formano 4 angoli retti (di $90^o = \frac{\pi}{2}^r$).

2. Il teorema di Talete e l'equazione della retta passante per due punti

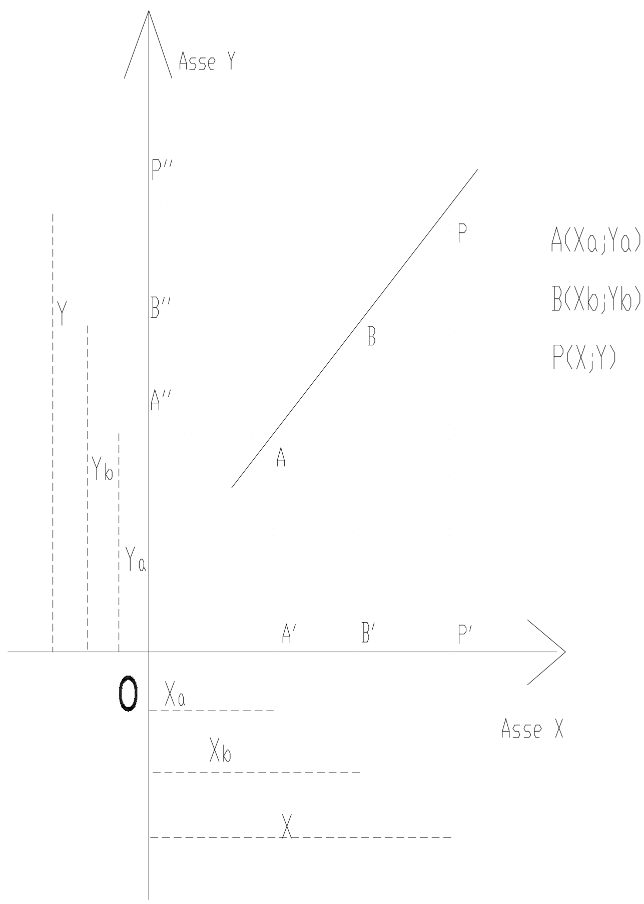

Figura 1

Sia O, X, Y un sistema di assi cartesiani ortogonali ed r una retta come in figura.
Consideriamo sulla retta r tre punti A, B, P.
Due fissi A e B e uno mobile P, rispettivamente di coordinate

$$A \equiv (x_a; y_a)$$

$$B \equiv (x_b; y_b)$$

$$P \equiv (x; y)$$

Consideriamo le perpendicolari rispetto all'asse X dei punti A, B, P; tali perpendicolari intersecano l'asse X punti A', B', P'.
Analogamente consideriamo le perpendicolari dei punti A, B, P sull'asse Y e chiamiamo A'', B'', P'' i punti di intersezione di tali perpendicolari sull'asse Y.

Ricordiamo che il teorema di Talete afferma :
Date rette parallele, tagliate da due trasversali, a segmenti proporzionali su una trasversale corrispondono segmenti proporzionali sull'altra trasversale.

Applichiamo il teorema di Talete alle parallele:

(1) $\overline{A - A'}$

(2) $\overline{B - B'}$

(3) $\overline{C - C'}$

tagliate dalle trasversali:

- retta r
- Asse X

Vediamo come possiamo applicare il dire :

A segmenti proporzionali sull'una corrispondono segmenti proporzionali sull'altra.

Consideriamo il seguente rapporto tra i segmenti sulla retta r

$$\frac{\overline{A-P}}{\overline{A-B}}$$

Il corrispondente rapporto sull'asse X é costituito dal rapporto tra i segmenti che sono la proiezione di

$$\overline{A-P}$$

e di

$$\overline{A-B}$$

sull'asse X. Cioé :

$$\frac{\overline{A'-P'}}{A'-B'}$$

In definitiva per il *Teorema di Talete* possiamo scrivere:

$$\frac{\overline{A-P}}{\overline{A-B}} = \frac{\overline{A'-P'}}{A'-B'} \tag{2.1}$$

Analogamente applichiamo il teorema di Talete alle parallele

$$\overline{A-A''}$$

$$\overline{B-B''}$$

$$\overline{P-P''}$$

e alle trasversali

- retta r
- Asse Y

e arriviamo alla proporzione

$$\frac{\overline{A-P}}{A-B} = \frac{\overline{A''-P''}}{\overline{A''-B''}} \tag{2.2}$$

Dal confronto tra le equazioni (2.1) e (2.2) si osserva che hanno uguale il primo membro, quindi possiamo uguagliare i secondi membri

$$\frac{\overline{A' - P'}}{A' - B'} = \frac{\overline{A'' - P''}}{\overline{A'' - B''}} \tag{2.3}$$

ma

$$A^{'} - P^{'} = x - x_a$$

$$A^{'} - B^{'} = x_b - x_a$$

$$A^{''} - P^{''} = y - y_a$$

$$A^{''} - B^{''} = y_b - y_a$$

Quindi si ottiene l'equazione

$$\frac{x - x_a}{x_b - x_a} = \frac{y - y_a}{y_b - y_a} \tag{2.4}$$

Tale equazione si chiama ***Equazione della retta passante per due punti***.

3. Dall'equazione della retta passante per due punti all'equazione in forma implicita

Riscriviamo l'equazione della retta passante per due punti

$$\frac{x - x_a}{x_b - x_a} = \frac{y - y_a}{y_b - y_a} \tag{3.1}$$

tale equazione puó essere trasformata utilizzando la regola del prodotto incrociato (il numeratore del pimo membro per il denominatore del secondo é uguale al prodotto del numeratore del secondo membro per il denominatore del primo):

$$(x - x_a) \cdot (y_b - y_a) = (x_b - x_a) \cdot (y - y_a) \tag{3.2}$$

sviluppiamo i prodotti

$$x\, y_b - x\, y_a - x_a\, y_b + x_a\, y_a = x_b\, y - x_b\, y_a - x_a\, y + x_a y_a \tag{3.3}$$

portiamo tutto al primo membro

$$x\,y_b - x\,y_a - x_a\,y_b + x_a\,y_a - x_b\,y + x_b\,y_a + x_a\,y - x_a y_a = 0 \tag{3.4}$$

le quantitá

$$x_a, x_b, y_a, y_b \quad \text{sono numeri}$$

ordiniamo l'equazione secondo l'ordine : x, y e numero.

$$(y_b - y_a)x + (x_a - x_b)y + (-x_a\,y_b + x_a\,y_a + x_b\,y_a - x_a y_a) = 0 \tag{3.5}$$

poniamo

$$a = y_b - y_a$$

$$b = x_a - x_b$$

$$c = -x_a\,y_b + x_b\,y_a$$

quindi l'equazione della retta passante per due punti la possiamo scrivere nella forma

$$\boxed{ax + by + c = 0} \tag{3.6}$$

tale forma di equazione della retta si chiama:

Equazione della retta in forma Implicita.

4. Dall'equazione in forma implicita all'equazione in forma esplicita

Sappiamo che l'equazione in forma implicita della retta é

$$ax + by + c = 0 \tag{4.1}$$

supponiamo di volerla scrivere nella forma

$$y = ...$$

a tale scopo ricaviamo la y dalla (4.1)

$$by = -ax - c$$

cioé

$$y = \frac{-ax - c}{b}$$

da cui

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \tag{4.2}$$

Poniamo

$$m = -\frac{a}{b} \tag{4.3}$$

$$q = -\frac{c}{b} \tag{4.4}$$

nella (4.2) e otteniamo

$$y = mx + q \tag{4.5}$$

La (4.5) rappresenta:

l'equazione della retta in forma esplicita.

La quantitá ***m*** si chiama *coefficiente angolare* e la quantitá ***q*** *intercetta*, m esprime l'inclinazione della retta rispetto all'asse orizzontale, q é l'ordinata del punto di intersezione tra la retta e l'asse delle ordinate.
In seguito faremo ulteriori commenti sulle quantitá *m* e *q*.

5. Rette parallele e fascio improprio

*Due rette sono tra loro parallele se hanno uguale coefficiente angolare **m**.*
Ad esempio, se abbiamo due rette r ed s scritte in forma esplicita, rispettivamente di equazione

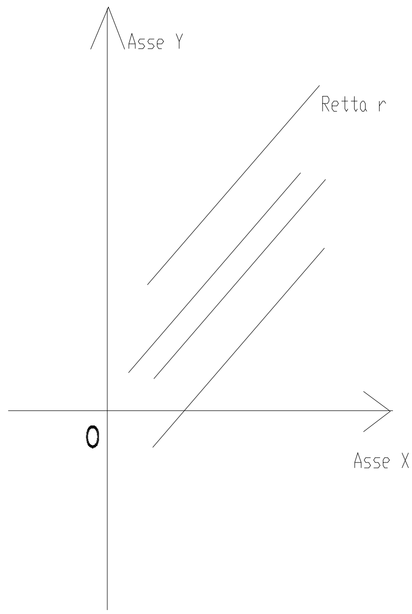

Figura 2

$$r:\ y = mx + q \tag{5.1}$$

e

$$s:\ y = m'x + q' \tag{5.2}$$

sono tra loro parallele se m=m'.

5.1. **Caso retta in forma implicita.** É evidente che se conosciamo l'equazione esplicita delle rette é semplice osservare se sono parallele.
Risulta non immediato se le conosciamo in forma implicita.
Analizziamo tale caso partendo da ció che rappresenta il coefficiente angolare m: sappiamo che

$$m = -\frac{a}{b}$$

e

$$m' = -\frac{a'}{b'}$$

.

Dovendo essere $m = m'$ segue che

$$-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$$

cioé

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \tag{5.3}$$

Due rette sono tra loro parallele se, il rapporto tra il coefficiente della x e quello della y di una retta é uguale al rapporto tra il coefficiente della x e quello della y dell'altra retta.

5.1.1. *Esempio 1, date due rette in forma implicita dire se sono parallele.* Siano r ed s due rette di equazione

$$r:\ 5x - 3y + 4 = 0 \tag{5.4}$$

$$s:\ 2x - 6y - 3 = 0 \tag{5.5}$$

dire se sono tra loro parallele.
Guardando le due equazioni si ha

$$\begin{cases} a = 5 \;\; b = -3 & \text{per la retta } r, \\ a' = 2 \;\; b' = -6 & \text{per la retta } s. \end{cases}$$

Calcoliamo il rapporto

$$\frac{a}{b} = -\frac{5}{3} \tag{5.6}$$

e il rapporto

$$\frac{a'}{b'} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \tag{5.7}$$

da ció si conclude **non** sono tra loro parallele.

5.2. **Equazione del fascio improprio di rette parallele.** *Si definisce fascio improprio l'insieme delle infinite rette tra loro parallele.*
Supponiamo di conoscere l'equazione di una retta in forma esplicita

$$y = m\,x + q \tag{5.8}$$

tale supposizione non é riduttiva in quanto se l'equazione la conosciamo in forma implicita é sempre possibile passare alla sua forma esplicita.

Visto che rette tra loro parallele , hanno lo stesso coefficiente angolare e l'equazione che riassume ció non puó che essere

$$y = m\,x + k \tag{5.9}$$

con $k \in \mathbb{R}$.
Al variare di k si ottengono tutte rette tra loro parallele, m rimane costante.

6. Rette Perpendicolari

Dal punto di vista geometrico due rette sono tra loro perpendicolari se incontrandosi formano quattro angoli retti (90^o).
Tale condizione geometrica dal punto di vista analitico si traduce nella:

$$m \;\cdot\; m' = -1 \tag{6.1}$$

il prodotto tra i coefficienti angolari di due rette tra loro perpendicolari é -1.

Dalla (6.1) é facile dedurre m ed m' l'uno in funzione dell'altro:

$$m = -\frac{1}{m'} \tag{6.2}$$

$$m' = -\frac{1}{m} \tag{6.3}$$

In definitiva data una retta r, trovare il coefficiente angolare della perpendicolare ad essa, basta prendere **l'opposto del reciproco** (opposto significa cambiare di segno, reciproco significa 1 diviso il numero) del valore del coefficiente angolare della retta cui si vuole trovare la perpendicolare.

Ad esempio se la retta r ha equazione

$$y = -\frac{4}{3}x + 7 \tag{6.4}$$

é evidente che ha coefficiente angolare

$$m_r = -\frac{4}{3}$$

una delle infinite rette s perpendicolari ad r deve avere coefficiente angolare

$$m_s = \frac{3}{4}$$

$\frac{3}{4}$ é l'opposto del reciproco di $-\frac{4}{3}$.

Quindi se conosciamo l'equazione di una retta in forma esplicita é facile scrivere l'equazione delle rette perpendicolari ad essa.

Infatti le rette s saranno tutte del tipo

$$y = \frac{3}{4}x + k \tag{6.5}$$

e al variare di k son tutte rette perpendicolari a r.

6.1. **Esempio 3: Ricerca delle perpendicolari ad una retta.** Data la retta

$$y = 3x - 5 \tag{6.6}$$

scrivere l'equazione delle perpendicolari ad essa.

Il coefficiente angolare di tale retta é 3, quindi per la (6.3) si ha

$$m' = -\frac{1}{3} \tag{6.7}$$

Di conseguenza l'equazione delle perpendicolari é

$$y = -\frac{1}{3}\,x + k \tag{6.8}$$

con $k \in \mathbb{R}$, e al variare di k si ottengono le infinite rette perpendicolari alla retta data.

6.2. **Esempio 4 molto significativo: Perpendicolare ad una retta e passante per un punto di coordinate** $P(x_o, y_0)$.

Data la retta r di equazione

$$y = -\frac{2}{3}\,x + \frac{1}{2} \tag{6.9}$$

trovare l'equazione della perpendicolare $''s''$ e tale perpendicolare deve passare per il punto di coordinate $P_o(2, -\frac{2}{3})$.

Risoluzione:

Dalla (6.3) si evince

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-2/3} = \frac{3}{2} \tag{6.10}$$

quindi l'equazione di tutte le rette perpendicolari ad r é

$$y = \frac{3}{2}\,x + k \tag{6.11}$$

Adesso imponendo il passaggio per il punto P_o si trova il valore di k, in tal modo si ritrova l'equazione dell'unica retta s che soddisfa le condizioni richieste.

Se tali rette passano per P_o implica che le coordinate di P_o soddisfano l'equazione (6.11).

$$-\frac{2}{3} = \frac{3}{2}\,(2) + k$$

cioé

$$-\frac{2}{3} = 3 + k$$
$$-\frac{2}{3} - 3 = k$$

quindi

$$k = -\frac{11}{3} \tag{6.12}$$

In definitiva l'equazione dell'unica retta che verifica le condizioni richieste la si ottiene inserendo la (6.12) nella (6.11).

$$y = \frac{3}{2}\,x - \frac{11}{3} \tag{6.13}$$

Nota: Nel caso in cui conosciamo l'equazione in forma implicita basta trasformarla in esplicita e ricadiamo nello svolgimento precedente.

7. Intersezione tra due rette appartenenti ad uno stesso piano π

Due rette r ed $s \in \pi$ possono essere tra loro, *incidenti* o *parallele*.
Dal punto di vista analitico tale situazione si studia mediante il sistema lineare formato dalle equazioni delle due rette.
Ad esempio se:

$$r: \ ax + by + c = 0 \qquad \text{equazione di } r \tag{7.1}$$

$$s: \ a'x + b'y + c' = 0 \qquad \text{equazione di } s \tag{7.2}$$

Le coordinate cartesiane del punto di intersezione sono la soluzione del sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \tag{7.3}$$

7.1. **Esempio 5, intersezione tra due rette.** Studiare l'intersezione tra le rette

$$r: \ \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y = -2$$

ed

$$s: \ 2x - \frac{1}{3}y - 6 = 0$$

Troviamo le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y = -2 \\ 2x - \frac{1}{3}y - 6 = 0 \end{cases} \tag{7.4}$$

con il metodo di sostituzione.

$$\begin{cases} \frac{8x+3y}{12} = -\frac{24}{12} \\ \frac{6x-3y-18}{3} = \frac{0}{3} \end{cases} \tag{7.5}$$

$$\begin{cases} 8x = -3y - 24 \\ - - - - - \end{cases} \tag{7.6}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-3y-24}{8} \\ 6 \cdot (\frac{-3y-24}{8}) - 3y - 18 = 0 \end{cases} \tag{7.7}$$

$$\begin{cases} - - -- \\ 3 \cdot (\frac{-3y-24}{4}) - 3y - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - - - \\ \frac{-9y-72}{4} - 3y - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - - - - - \\ \frac{-36y-288-12y-72}{4} = \frac{0}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - - - - - \\ -48y - 360 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - - - \\ -48y = 360 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - - - - - \\ y = -\frac{15}{2} \end{cases} \tag{7.8}$$

$$\begin{cases} 8x - 3 \cdot (-\frac{15}{2}) - 24 = 0 \\ ------ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x + \frac{45}{2} - 24 = 0 \\ ------ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{16x+45-48}{2} = \frac{0}{2} \\ -------- \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16x - 3 = 0 \\ ------ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{16} \\ y = -\frac{15}{2} \end{cases} \tag{7.9}$$

Tale soluzione indica che le due rette si incontrano nel punto

$$P \equiv (\frac{3}{16}, -\frac{15}{2})$$

Nota: Nel caso in cui il sistema lineare non ammette soluzioni significa che non esiste alcuna coppia di coordinate cartesiane tale che sia soluzione del sistema, cioé non esiste alcun punto che sia intersezione delle due rette; necessariamente le due rette sono tra loro parallele.

8. Grafico di una retta

Data una retta scritta in forma qualsiasi, é sempre possibile mediante calcoli algebrici portarla alla forma implicita:

$$ax + by + c = 0 \tag{8.1}$$

per tracciare il grafico di tale retta occorre scriverla in forma esplicita

$$y = m\,x + q$$

dalla (8.1) si ottiene

$$by = -ax - c$$

cioé

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \tag{8.2}$$

Ottenuta l'equazione in forma esplicita basta dare alla x due valori qualsiasi e ottenere i corrispondenti valori per la y.
Ad esempio possiamo supporre di dare alla x i seguenti due valori

$$x_1,\ x_2$$

che sostituiti nella (8.2) dapprima x_1 , poi x_2, ci fanno ottenere

$$y_1 \; e \; y_2$$

Successivamente si considerano i punti:

$$A \equiv (x_1, y_1) \; e \; B \equiv (x_2, y_2)$$

che posizionati in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali ci permettono di tracciare il grafico della retta.

8.1. **Esempio - grafico di una retta.** Tracciare il grafico della seguente retta

$$\frac{2}{3}\,x - \frac{1}{2}\,y + \frac{5}{2} = \frac{3}{5}\,x - \frac{2}{3}\,y \tag{8.3}$$

calcoliamo il $m.c.m.$ tra tutti i denominatori dell'equazione, guardando sia quelli del primo membro sia quelli del secondo, in modo che nei passaggi successivi i coefficienti siano tutti interi.
Ovviamente

$$m.c.m.(3, 2, 5) = 30$$

per cui

$$\frac{20\,x - 15\,y + 45}{30} = \frac{18\,x - 20\,y}{30} \tag{8.4}$$

essendo uguali i denominatori dei due membri dell'equazione possiamo eliderli; inoltre portiamo tutto al primo membro

$$20\,x - 15\,y + 45 - 18\,x + 20\,y = 0 \tag{8.5}$$

raccogliamo a fattor comune

$$20\,x + 5\,y + 45 = 0 \tag{8.6}$$

ricaviamo la y

$$y = \frac{20\,x + 45}{5} \tag{8.7}$$

Adesso é immediato porgerla in forma esplicita

$$y = \frac{20}{5}x + \frac{45}{5} \tag{8.8}$$

cioé

$$y = 4\,x + 9 \tag{8.9}$$

Fissiamo due valori a piacere per la x

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 5$$

inseriamo x_1 nella (8.9) e otteniamo

$$y_1 = 4 \cdot 3 + 9 \tag{8.10}$$

cioé

$$y_1 = 21 \tag{8.11}$$

analogamente si ottiene la y_2

$$y_2 = 29 \tag{8.12}$$

I punti

$$A \equiv (x_1, y_1) \equiv (3, 21)$$

e

$$B \equiv (x_2, y_2) \equiv (5, 29)$$

sono due punti della retta in quanto soddisfano l'equazione.

Sapendo che per due punti passa una ed una sola retta, la abbiamo univocamente individuata