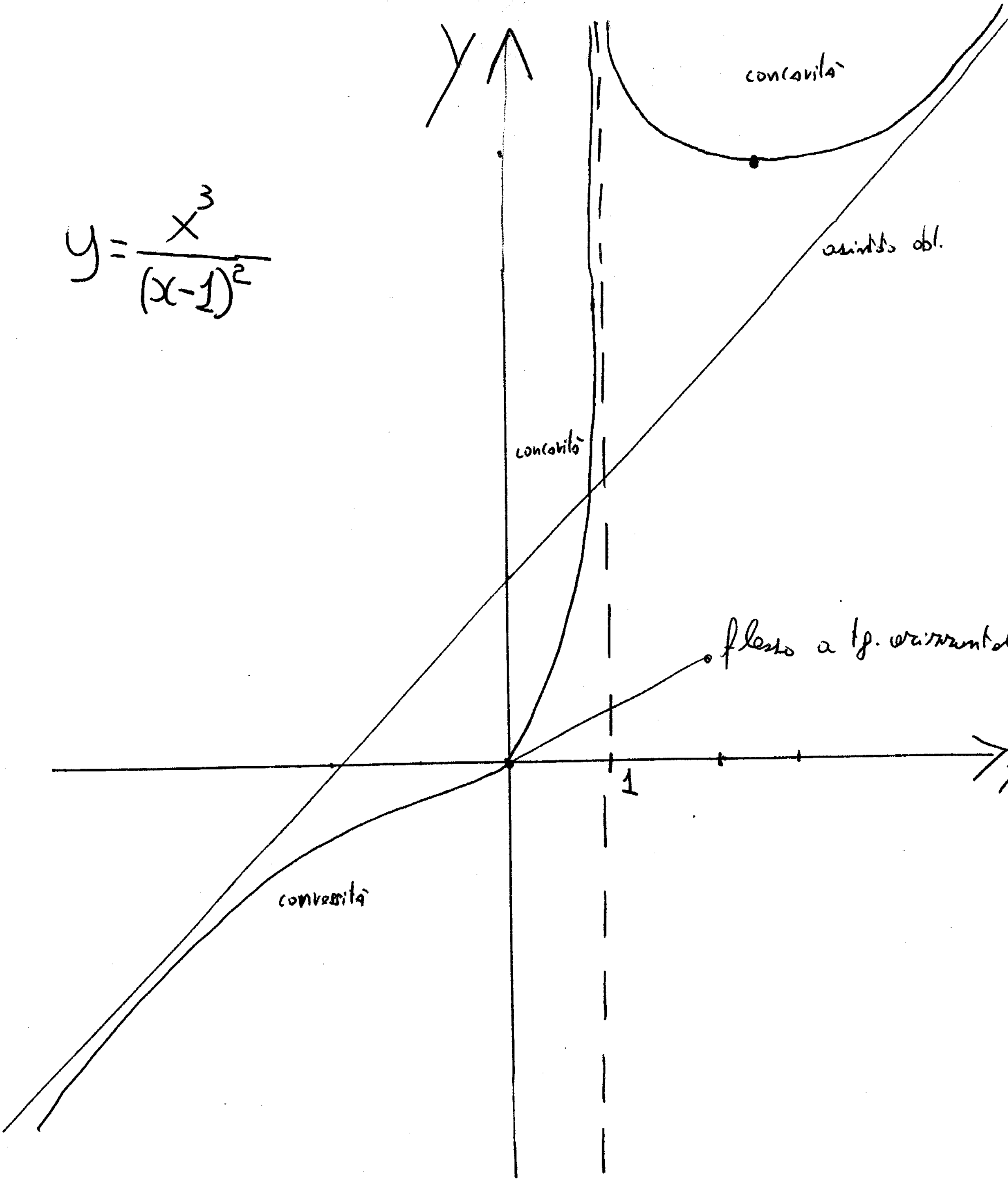
$$y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$


Y
concavità
concavità
asintoto obl.
flesso a tg. orizzontale
X
1
convessità

Cerchiamo il Campo di Esistenza C.E.

Sappiamo che se una funzione razionale ha denominatore uguale a $\emptyset \Rightarrow$ la funzione tende a $+\infty$ o a $-\infty$. Pertanto cerchiamo le $x \in X$ che annullano il denominatore, poi escluderemo dall'asse $X \subseteq \mathbb{R}$ tali valori che manderebbero la funzione a ∞.

$$(x-1)^2=0 \; ; \; (x-1)(x-1)=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

Per $x=1$ il denominatore $D(x)$ si annulla

$$C.E. = X \setminus \{1\} =]-\infty;1[\; \cup \;]1;+\infty[$$

Intersezione con l'Asse X (A_X)

Studiamo il sistema:

$$\begin{cases} \text{funzione} \\ \text{equazione asse } X \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{x^3}{(x-1)^2} \\ y = 0 \end{cases}$$

$\dfrac{x^3}{(x-1)^2} = 0$. Una frazione assume valore nullo se e soltanto se $N(x) = 0 \Rightarrow$

$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\gamma \cap A_x = P_1 \equiv (0,0)$ la curva passa per l'origine.

Intersezione con l'Asse Y

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2} \\ \text{eq. Asse } Y \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{0}{(0-1)^2} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \gamma \cap \text{Asse } Y = P_2 \equiv (0,0)$$

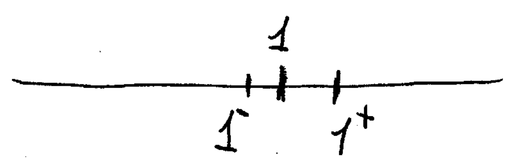
Abbiamo visto che la funzione si annulla per $x = 1 \Rightarrow$ i limiti che studieremo sono:

1) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$; 2) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$; 3) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

4) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

1) $$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

Ricordiamo che 1^- è una quantità infinitesimamente più piccola di 1



In caso di incertezza, 1^- possiamo indicarlo con

$$1^- = 0,999$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{(0{,}999)^3}{(0{,}999-1)^2} = \frac{(0{,}999)^3}{(-0{,}001)^2} = \frac{(0{,}999)^3}{0{,}00001} \to$$

$$\to +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty}$$

Studiamo $\displaystyle \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{(1^+)^3}{(1^+-1)^2} = \frac{1^+}{0^+} = +\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty}$$

Osserviamo che sia per $x \to 1^-$ che per $x \to 1^+$ la funzione diverge a $+\infty$

Calcoliamo $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{(+\infty)^3}{(+\infty-1)^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$

forma indeterminata.

Lo risolviamo in modo classico

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2+1-2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{0+0-0} = \frac{1}{0} = +\infty$$

In definitiva

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty}$$

Calcoliamo $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{(-\infty)^3}{(-\infty-1)^2} = \frac{-\infty}{+\infty}$ forma indeterminata. Risolviamo il limite con il teorema di De L'Hospital

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2-2x+1} \overset{H}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{2x-2} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{6x}{2} = \frac{6(-\infty)}{2} = \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

Riassumendo

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = -\infty}$$

Visto che nessuno dei limiti $\lim_{\substack{x \to -\infty \\ x \to +\infty}}$ vale un $\underbrace{\text{numero costante}}_{\text{poiché entrambi divergono}} \Rightarrow \nexists$ Asintoto orizzontale

Potrebbe esistere l'Asintoto Obliquo $y = mx + q$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\cancel{3}\,2}}{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - 0 - 0} = 1 \; ; \; m = 1 \Rightarrow \exists$$

Asintoto Obliquo

$$q = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx \right]$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x(x^2+1-2x)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} - x + 2x^2}{(x-1)^2} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - x}{(x-1)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(2x-1)}{x^2-2x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-x}{x^2-2x-1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(2 - \frac{1}{x}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} =$$

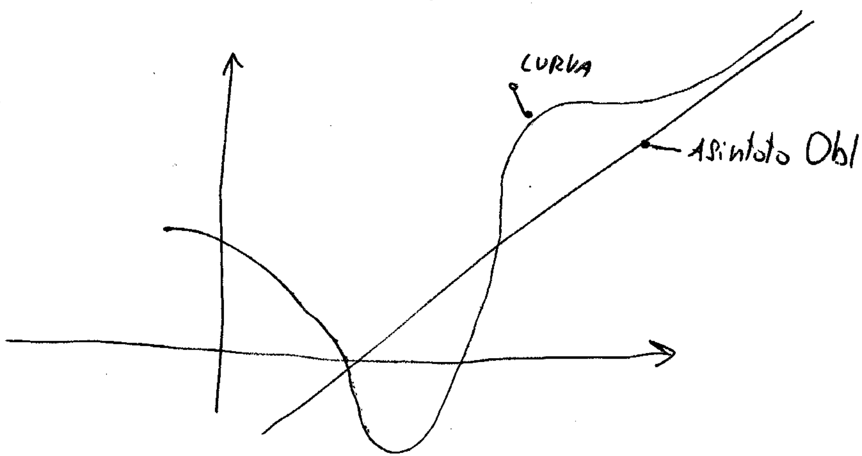
$$= \frac{2-0}{1-0-0} = 2 \,. \quad q = 2$$

L'asintoto obliquo ha equazione

$$y = x + 2$$

Studiamo $\gamma \cap$ A. Obl.

L'asintoto obliquo è una retta tangente alla curva nei punti all'infinito, ma al finito, può avere delle intersezioni con la curva, ad esempio



Ricerchiamo le eventuali intersezioni

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2} \\ y = x+2 \end{cases}$$

per sostituzione:

$$x+2=\frac{x^3}{(x-1)^2}\ ; \quad (x+2)(x-1)^2=x^3\ ;$$

$$(x+2)(x^2-2x+1)-x^3=0\ ; \quad \cancel{x^3}-\cancel{2x^2}+x+\cancel{2x^2}-4x+2-\cancel{x^3}=0$$

$$-3x+2=0\ ; \quad 2=3x\ ; \quad x=\frac{2}{3}$$

Calcoliamo l'ordinata

$$y=x+2\ ; \quad y=\frac{2}{3}+2\ ; \quad y=\frac{2+6}{3}\ ; \quad y=\frac{8}{3}$$

La curva interseca al finito l'A. Obl. nel punto $P_3\equiv\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{8}{3}\right)$

Calcoliamo la derivata prima della funzione $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

$$y' = \frac{(x^3)'(x-1)^2 - x^3 \cdot \left[(x-1)^2\right]'}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot \left(2(x-1)\right)}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1)}{(x-1)^4}$$

potremmo continuare a svolgere i calcoli e semplificare qualcosa del denominatore, ma al fine di non studiare il segno di $D(x)$ lo lasciamo con potenze pari, quando studiamo $y' > 0$.

$$y' = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1)}{(x-1)^4}$$

Studiamo $y' = 0$

$$y' = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{\cancel{(x-1)}\left[3x^2(x-1) - 2x^3\right]}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^2\left[3(x-1) - 2x\right]}{(x-1)^3}$$

questa forma sembra la più conveniente per lo studio di $y' = 0$

$y' = 0 \iff N(x) = 0$

$x^2\left[3(x-1) - 2x\right] = 0$; $x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$3(x-1) - 2x = 0$; $3x - 3 - 2x = 0$; $x - 3 = 0$; $x_2 = 3$

I punti candidati ad essere di MAX o min o flesso a tangente orizzontale sono

$x_1 = 0$ e $x_2 = 3$

Studiamo $y' > 0$

partiamo dalla seguente forma di y'

$$\frac{3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1)}{(x-1)^4} > 0$$

Studiamo $N(x) > 0$

$$3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1) > 0$$

$$\underbrace{x^2}_{1^\circ \text{ fattore}}\underbrace{(x-1)}_{2^\circ \text{ fattore}}\underbrace{\left[3(x-1) - 2x\right]}_{3^\circ \text{ fattore}} > 0$$

1° fattore > 0 ; $x^2 > 0$ sempre

0

\+ + + + + + + + + + + + + + + +

2° fattore $x - 1 > 0$; $x > 1$

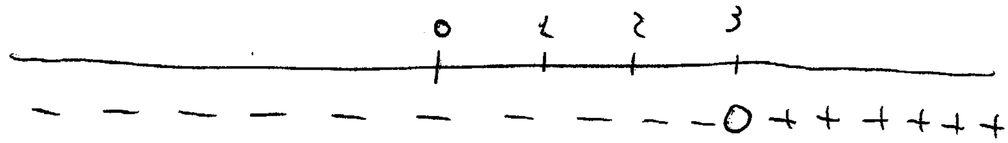
0 1

\- - - - - - - - 0 + + + + + + +

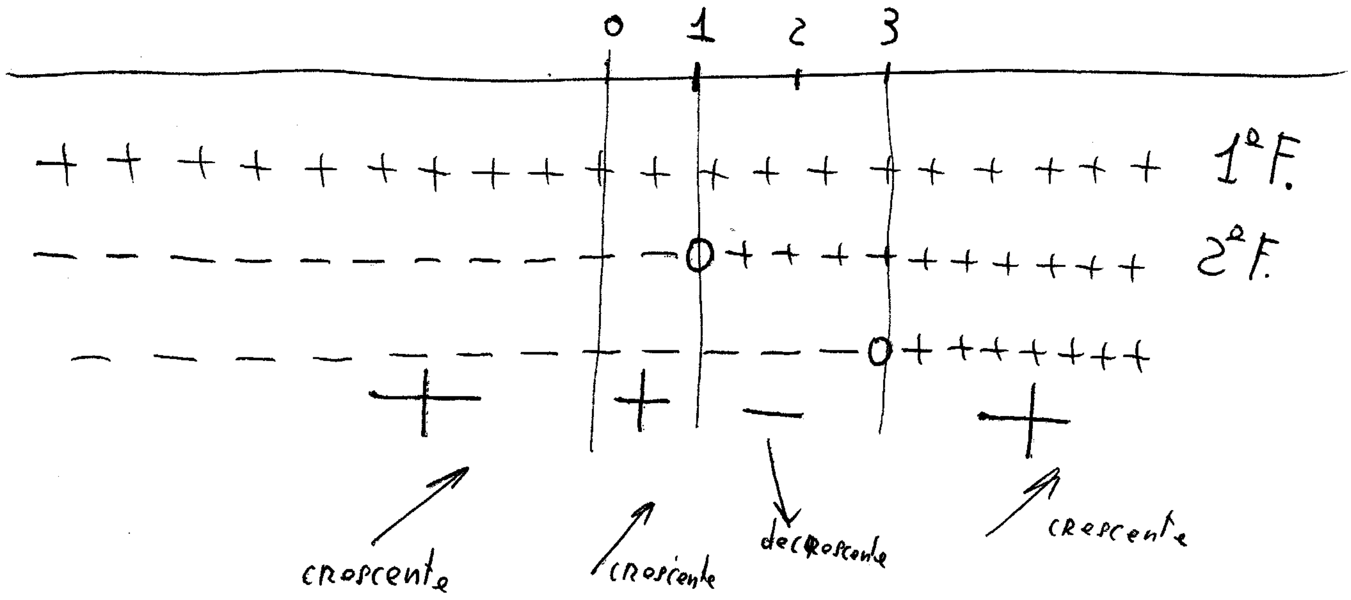
3° Fattore

$3(x-1)-2x>0$; $3x-3-2x>0$; $x-3>0$;

$x>3$



Studiamo il prodotto dei segni



In X=1 c'è Asintoto verticale

per X=0 Flesso ascendente a tangente orizzontale

per X=3 minimo relativo

Calcoliamo l'ordinata del min.

$$y(3) = \frac{(3)^3}{(3-1)^2} = \frac{27}{4}$$

$$\min \equiv \left(3 ; \frac{27}{4}\right).$$

Calcoliamo la y''

prima di procedere al calcolo di y'' troviamo la forma ottimale di y' al fine di determinare la y''.

Partiamo da: $y' = \dfrac{3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1)}{(x-1)^4} =$

$$= \frac{\cancel{(x-1)}\left[3x^2(x-1) - 2x^3\right]}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}. \qquad y' = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$$

$$y'' = \frac{(x^3-3x^2)' \cdot (x-1)^3 - (x^3-3x^2) \cdot \left[(x-1)^3\right]'}{(x-1)^6} =$$

$$= \frac{(3x^2-6x)(x-1)^3 - (x^3-3x^2) \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} =$$

$$= \frac{\cancel{(x-1)^2}\left[(3x^2-6x)(x-1) - 3(x^3-3x^2)\right]}{(x-1)^{\cancel{6}\,4}} =$$

$$= \frac{\cancel{3x^3} \cancel{-3x^2} \cancel{-6x^2} + 6x \cancel{-3x^3} \cancel{+9x^2}}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{6x}{(x-1)^4}$$

$$\boxed{y'' = \frac{6x}{(x-1)^4}}$$

Per trovare i punti candidati ad essere "flessi a tangente obliqua" si deve studiare

$$y'' = 0$$

cioè $\frac{6x}{(x-1)^4} = 0$; $6x = 0$; $x = 0$

ma in $x = 0$ c'è un flesso a tangente orizzontale e tale tangente è l'asse X, per cui non ci sono flessi a tangente obliqua

CONCAVITÀ e CONVESSITÀ

La funzione è concava dove $y'' > 0$ ed è convessa dove $y'' < 0$.

$y'' > 0 \Rightarrow \frac{6x}{(x-1)^4} > 0$; $N(x)$: $6x > 0$ per $x > 0$

$D(x)$ è sempre > 0 $(+)$. Per cui risulta che $f(x)$ è concava per $x > 0$ $\cup$; convessa per $x < 0$.