

Esercizi sulle forme indeterminate dei Limiti, risolti per via classica , senza l'utilizzo del teorema di De L'Hopital

Titolo nota

Tabella forme indeterminate dei limiti:

$+\infty - \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$
$0 \cdot \infty$	1^∞	0^0
		∞^0

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - 2x =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 2x$$

$$\text{ma } x \rightarrow +\infty \Rightarrow |x| = x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 2 \right) =$$



$$= +\infty \cdot (1 - 2) = +\infty \cdot (-1) = -\infty$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x =$$

proponiamo la stessa tecnica dell'esercizio precedente

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + x =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x =$$

$$\text{se } x \rightarrow -\infty \Rightarrow |x| = -x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) =$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 0 0

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x (0) = +\infty \cdot 0$$

ma questa è un'altra forma indeterminata, per cui dobbiamo cambiare strategia, razionalizziamo.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + x + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} - x} =$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{|x| \cdot \sqrt{1} - x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{-x \cdot 1 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{x(-1 - 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{-2 \cdot x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x} - 5}{x - 25}$$

razionalizziamo

$$\lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x} - 5}{x - 25} \cdot \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 5} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 25} \frac{x - 25}{(x - 25) \cdot (\sqrt{x} + 5)} = \lim_{x \rightarrow 25} \frac{1}{\sqrt{x} + 5} =$$

$$= \frac{1}{5 + 5} = \frac{1}{10}$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3}}{x + 1} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(4 - \frac{3}{x^2} \right)}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{4 - \frac{3}{x^2}}}{x + 1} =$$

Visto che $x \rightarrow +\infty \Rightarrow |x| = x$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{4 - \frac{3}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4}}{1} =$$

$$= 2$$

Exercício

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 8}}{2x + 1} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{8}{x^2}\right)}}{x \left(2 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{8}{x^2}}}{x \left(2 + \frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x \sqrt{1 + \frac{8}{x^2}}}{x \left(2 + \frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8}{x^2}}\right)}{x \left(2 + \frac{1}{x}\right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{8}{x^2}} \rightarrow 0}{2 + \frac{1}{x} \rightarrow 0} =$$

$$\frac{1 + 1}{2} = 1$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} - x}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x - 2} - \frac{x}{x - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)}}{x - 2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)} - \frac{1}{1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{1 - \frac{2}{x}} - 1 =$$

$$= \frac{1}{1} - 1 = 0$$

Übung 10

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 2}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(3 - \frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(3 - \frac{2}{x}\right)}{|x| \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} =$$

$$\text{da } x \rightarrow -\infty \Rightarrow |x| = -x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(3 - \frac{2}{x}\right)}{-x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{2}{x} \rightarrow 0}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} =$$

(Note: Red arrows in the original image point from $\frac{2}{x}$ to 0, from $\frac{1}{x}$ to 0, and from $\frac{1}{x^2}$ to 0.)

$$= \frac{3}{-1} = -3$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 - \frac{3}{x} \right)}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 - \frac{3}{x} \right)}{x \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sim}{x \left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3} - 1} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sim}{x \left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{2}{3}} \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{3}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} = \frac{2 - 0}{0 + 0} = +\infty$$

Enunciado

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 - 1}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)} - \sqrt{x^2 \left(4 - \frac{1}{x^2}\right)}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{|x| \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - |x| \cdot \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - (-x) \cdot \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x \sqrt{1 - \frac{1}{x}} + x \cdot \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x \left(-\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} \right)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \frac{2}{-\sqrt{1 - 0^-} + \sqrt{4 - 0}} =$$

(0^- é negativo)

$$= \frac{2}{-1 + 2} = \frac{2}{1} = 2$$

Exercício

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 2 - x^2}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x} \right)} - x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + 2}{|x| \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x}} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + 2}{-x \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x}} - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-3 + \frac{2}{x} \right)}{x \left(-\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x}} - 1 \right)} =$$

$$= \frac{-3 + 0}{-1 - 1} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Ergebnis

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^4 + 5x^2}}{(x+2)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 \left(9 + \frac{5}{x^2}\right)}}{x^2 + 2x + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \cdot |x| \cdot \sqrt{9 + \frac{5}{x^2}}}{x^2 + 2x + 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \cdot \sqrt{9 + \frac{5}{x^2}}}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{9+0}}{1+0+0} = 3$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + 2x}{8x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{8x - 4} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{8x - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}}{x \left(8 - \frac{4}{x}\right)} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x \left(8 - \frac{4}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x \left(8 - \frac{4}{x}\right)} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{8 - \frac{4}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x \left(8 - \frac{4}{x}\right)} + \frac{2}{8 - 0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{8 - \frac{4}{x}} + \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{-1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{-1+2}{8} = \frac{1}{8}$$

Tutti i seguenti limiti notevoli si riferiscono alla forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$ ad eccezione del limite notevole del numero di Nepero, che fa riferimento alla forma indeterminata $[1^\infty]$.

Nome	Limite notevole	Generalizzato	Tipo
Logaritmo naturale	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$	3
Funzione logaritmica	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln(a)}$	$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+f(x))}{f(x)} = \frac{1}{\ln(a)}$	1
Funzione esponenziale	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1$	3
Esponenziale con base arbitraria	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$	$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{a^{f(x)} - 1}{f(x)} = \ln(a)$	1
Numero di Nepero	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim_{f(x) \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$	1
Potenza con differenza	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^c - 1}{x} = c$	$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{(1+f(x))^c - 1}{f(x)} = c$	1
Funzione seno	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$	1
Funzione coseno	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(f(x))}{(f(x))^2} = \frac{1}{2}$	1
Funzione tangente	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$	$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\tan(f(x))}{f(x)} = 1$	3
Arcoseno	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$	$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\arcsin(f(x))}{f(x)} = 1$	1
Arcotangente	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$	$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\arctan(f(x))}{f(x)} = 1$	1
Seno iperbolico	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x)}{x} = 1$	$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sinh(f(x))}{f(x)} = 1$	2
Coseno iperbolico	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh(x) - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\cosh(f(x)) - 1}{(f(x))^2} = \frac{1}{2}$	2
Tangente iperbolica	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh(x)}{x} = 1$	$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\tanh(f(x))}{f(x)} = 1$	3

Limiti Notevoli: Tabella

funzioni goniometriche	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arctg } x}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } mx}{\text{sen } nx} = \frac{m}{n}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\arccos x)^2}{1 - x} = 2$
funzioni esponenziali e logaritmiche	
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a (1 + x)}{x} = \log_a e$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^k - 1}{x} = k$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 1)$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + a^x} = \begin{cases} 1 & \text{se } a < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } a > 1 \end{cases}$

Forme indeterminate di limiti di funzioni goniometriche

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = 1 \cdot 1 = 1$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} + \frac{\sin x}{x} = 1 + 1 = 2$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{2x} =$$

per la relazione fondamentale delle goniometria

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad ; \quad \cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x + x}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{x} + \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} 1 =$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} + 1 =$$

il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ lo abbiamo già calcolato e vale 1

per cui si ha

$$= 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{2x + \sin x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x\left(2 + \frac{\sin x}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{2 + \frac{\sin x}{x}} =$$

$$= \frac{0+1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{1 - \cos x} =$$

dividiamo $N(x)$ e $D(x)$ per x^2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{1 - \cos x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{1 - \cos x}{x^2}} =$$

$$= \frac{2}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}} = (\text{per la tabella presente})$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 = 4$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{2 - \cos x} - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{2 - \cos x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2 - \cos x} + 1}{\sqrt{2 - \cos x} + 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x (\sqrt{2 - \cos x} + 1)}{2 - \cos x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x (\sqrt{2 - \cos x} + 1)}{1 - \cos x} =$$

dividiamo $N(x)$ e $D(x)$ per x

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{2 - \cos x} + 1}{1 - \cos x}}{\frac{x}{x}} \rightarrow 0$$

$$1) \frac{\sqrt{2-4} + 1}{0} = \frac{1+1}{0} = \infty$$

Übung 10

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 5x}{x + 2 \sin x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(\frac{\sin x}{x} + 5 \right)}{x \left(1 + \frac{2 \sin x}{x} \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} + 5}{1 + 2 \cdot \frac{\sin x}{x}} = \frac{1 + 5}{1 + 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{6}{3} = 2$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x}$$

poniamo $4x = y$; $x = \frac{y}{4}$;

se $x \rightarrow 0$ anche $y \rightarrow 0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{3 \cdot \frac{y}{4}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{\frac{3y}{4}} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \sin y \cdot \frac{4}{3y} = \frac{4}{3} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{\sin^2 x}$$

moltiplichiamo e dividiamo tutto il limite per 9 e

moltiplichiamo e dividiamo $D(x)$ per x^2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9}{9} \cdot \frac{1 - \cos(3x)}{\frac{x^2}{x^2} \cdot \sin^2 x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9}{9} \cdot \frac{1 - \cos 3x}{x^2 \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 1 1

$$= 9 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{9x^2} = 9 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

Enunciato

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lg x \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{0}{1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} =$$

$$= 0 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 x} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 x} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Exercise 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} \cdot \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} =$$

$$= 0 \cdot 1 = 0$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

$\sin x$ oscilla tra $[-1, 1]$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

dividiamo tutto per x

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

per $x \rightarrow \infty$ si ha

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$



implica che anche $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \infty$

Enocirio

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

poniamo $y = x - \frac{\pi}{2}$

$$\therefore x = y + \frac{\pi}{2}$$

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow y \rightarrow 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(y + \frac{\pi}{2})}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos y \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \sin y \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos y \cdot 0 - \sin y \cdot 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin y}{y} =$$

$$= - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = -1$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \sin^3(x) + x^3}{\tan x - \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 \sin^3 x + x^3}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^3 x + x^3}{\sin x - \sin x \cdot \cos x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (3 \sin^3(x) + x^3) \cdot \frac{\cos x}{\sin x - \sin x \cdot \cos x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot (3 \sin^3(x) + x^3)}{\sin x \cdot (1 - \cos x)} = \text{divisione } N(x) \cdot D(x) \text{ per } x^3$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x \cdot (3 \sin^3(x) + x^3)}{x^3}}{\frac{\sin x \cdot (1 - \cos x)}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \left(\frac{3 \sin^3 x + x^3}{x^3} \right)}{\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2}} =$$

$\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_1 \cdot \underbrace{\frac{1 - \cos x}{x^2}}_{\rightarrow \frac{1}{2}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \left(3 \frac{\sin^3 x}{x^3} + \frac{x^3}{x^3} \right)}{\frac{4}{2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \cos x = \left(3 \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow 1} + 1 \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \cos x = (3 + 1) = 2 \cdot 1 \cdot (4) = 8$$

Esercizio

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{x} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Moltiplichiamo e dividiamo $D(x)$ per x

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{x \cdot x \cdot \frac{1}{x}} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{x^2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} =$$

poniamo $\frac{1}{x} = y \Rightarrow$ se $x \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1 \Rightarrow$$

In definitiva il risultato è 1.

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot (2x+1)$$

moltiplichiamo e dividiamo per x

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot (2x+1)}{\frac{x}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot (2x+1)}{\frac{1}{x} \cdot x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{2x+1}{x} =$$

studiamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$\text{poniamo } \frac{1}{x} = y$$

$$\text{se } x \rightarrow +\infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Stuoliamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x} =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2 + \frac{1}{x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2 + 0 = 2$$

In definitiva il risultato è $1 \cdot 2 = 2$

Forme indeterminate di limiti di funzioni esponenziali e logaritmiche

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3+x}{x} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x} + 1 \right)^x$$

poniamo $\frac{x}{3} = t \Rightarrow$

$$x = 3t$$

se $x \rightarrow +\infty$ anche $3t \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} + 1 \right)^{3t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t} \right)^t \right]^3 =$$

$$= \left[\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t \right]^3 = e^3$$

Exercício

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+5) - \ln 5}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+5}{5}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x}{5} + 1\right)}{x} =$$

ponhamos $\frac{x}{5} = t$; $x = 5t$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{5t} = \frac{1}{5} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5}$$

Übung 10

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-4x} - 1}{x^2 - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-4x} - 1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-4x} - 1}{x} \cdot \frac{1}{x-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4}{-4} \cdot \frac{e^{-4x} - 1}{x} \cdot \frac{1}{x-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-4x} - 1}{-4x} \cdot \frac{1}{x-1} \cdot (-4) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-4x} - 1}{-4x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4}{x-1} =$$

$$= 1 \cdot 4 = 4$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4 = e \cdot \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^4 =$$

$\downarrow$
 e

$$= e(1+0)^4 = e \cdot 1 = e$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+2}\right)^x$$

poniamo $x+2 = t$; se $x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty$

$$x = t - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t-2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2} =$$

$$= e \cdot (1)^{-2} = e$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+3)^x}{(x+1)^x} = \text{determiniamo } N(x) \text{ e } D(x) \text{ per } x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{x+3}{x} \right)^x}{\left(\frac{x+1}{x} \right)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{x} \right)^x}{\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x} =$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x} = \frac{N(x)}{D(x)} \text{ lo abbiamo già}$$

$\downarrow$

$$\text{calcolo e val } e^3 \Rightarrow$$

$$= \frac{e^3}{e} = e^2$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

poniamo $\frac{1}{x} = t$, $1 = xt$, $x = \frac{1}{t}$

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{1}{t} \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)$$

dalle proprietà dei logaritmi sappiamo che

$$c \cdot \log_a b = \log_a b^c \quad \text{che in } \ln \text{ vorrebbe}$$

$$c \ln a = \ln a^c$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) =$$

ma il limite è il limite precedentemente studiato, quindi :

$$= \ln e = 1 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Generalizzando} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \\ e \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \end{array} \right.$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$$

poniamo $3x = t$; $x = \frac{t}{3}$; se $x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{\frac{t}{3}} = \lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t) \cdot \frac{3}{t} =$$

$$= 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 3 \cdot 1 = 3$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

poniamo $e^x - 1 = t$; $e^x = t + 1$;

$$\ln e^x = \ln(t + 1); \quad x = \ln(t + 1)$$

se $x \rightarrow 0 \Rightarrow t = e^x - 1$; $t = e^0 - 1$; $t \rightarrow 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(t + 1)}$$

divisione $N(t) = O(t)$ per t

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t}{t}}{\frac{\ln(t + 1)}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(t + 1)}{t}} =$$

ma $D(x) \rightarrow 1 \Rightarrow$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

Generalizziamo: 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Exercício

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{2x} - 1}{x}$$

ponhamos $2x = t$, $x = \frac{t}{2}$, $x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{5^t - 1}{\frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} (5^t - 1) \cdot \frac{2}{t} =$$

$$= 2 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5^t - 1}{t} = 2 \cdot \ln 5 = \ln 5^2 = \ln 25$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{2^x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e(e^{x-1} - 1)}{2(x-1)} =$$

$$= \frac{e}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1}$$

poniamo $x-1=t$

$$x=t+1, \text{ se } x \rightarrow 1 \Rightarrow t \rightarrow 0$$

$$= \frac{e}{2} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = \frac{e}{2} \cdot 1 = \frac{e}{2}$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$$

dividiamo $N(x)$ e $D(x)$ per x

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} =$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

Esercizio N° 252 pag 1526

①

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x-1) - \ln 3x}{3x-1} = 0$$

Dalle proprietà dei logaritmi sappiamo che

$$\ln(3x-1) - \ln 3x = \ln \frac{3x-1}{3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{3x-1}{3x}}{3x-1} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{3x-1}{3x}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-1)} =$$

$$\ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{3x} \right) \quad (*)$$

$$= \frac{\ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{3x} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-1)} = \text{studiamo}$$

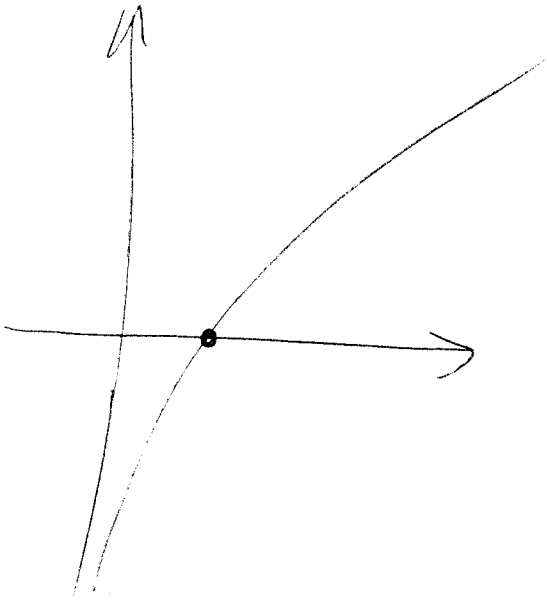
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(3 - \frac{1}{x})}{3x} \rightarrow \frac{3-0}{3} = 1$$

Quindi il limite $\ast$ conviene

②

$$= \frac{\ln 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-1)} =$$

per la funzione logaritmo naturale



$$= \frac{0}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-1)} = \frac{0}{\infty} = 0$$

0/4

Esercizio N 261

③

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - x}{x+1} \right)^{x^2} = +\infty \quad \text{E}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - x}{x+1} \right)^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2}$$

2 termini $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - x}{x+1} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(4 - \frac{x}{x^2} \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(4 - \frac{1}{x} \right)}{\left(1 + \frac{1}{x} \right)} \rightarrow \frac{+\infty (4 - 0)}{1 + 0} = +\infty$$

Calcoliamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

In definitiva il limite diventa $(+\infty)^{+\infty}$ che non è forma indeterminata $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$

0/4

(4)

Exercício N 281

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x + x}{x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{\tan x}{\cos x} + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \tan x + x \cos x}{\cos x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \tan x}{\cos x} + \frac{x \cos x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} +$$

$$+ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} + 1 =$$

$$= 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) + 1 = 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \right) + 1 =$$

$$= 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \right) + 1 =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 = 3$$

(OH)

Esercizio N 283

5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{1 - \cos x} = 4$$

$$2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} \quad (*)$$

Noi sappiamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{da cui } \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = 2 \quad \text{Quindi torniamo}$$

ad (*)

$$2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = 2 \cdot 2 = 4$$

OK

Esercizio ^N ~~233~~ 233 pag 1527

6

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{\sin^2 x} \cdot \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{\sin^2 x} \cdot \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} =$$

per le formule di duplicazione $\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}$:

$$= \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \cdot \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \cdot \frac{\cancel{\sin x} (2 \cos x)}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

(7)

$$= 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \right) =$$

Par la relation fondamentale $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$= 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\cos^2 x - 1 + \cos^2 x} \right) ;$$

$$2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{2 \cos^2 x - 1} \right) ;$$

$$2 \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2 \cos^2 x - 1} \right)$$

$$\downarrow \frac{1}{2 \cdot 1 - 1} = \frac{1}{1} = 1$$

(8)

Al momento il limite della traccia 2 è
risolto al calcolo del limite:

$$2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

tal limite sarebbe in forma indeterminata.

Modifichiamolo

$$2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \cdot \frac{(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)} =$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 x)}{\sin x (1 + \cos x)} =$$

(per le relazioni fondamentali)

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\cancel{\sin x} (1 + \cos x)} =$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} \Rightarrow 2 \cdot \frac{0}{1+1} =$$

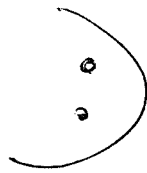
$$= 2 \cdot 0 = 0$$

In definitiva il limite è

(9)

$$0 \cdot 1 = 0$$

L'1 è riferito al limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2 \cos^2 x - 1}$



Esercizi su Limiti interessanti

①

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \ln(1+2x)}{\sin 3x} \quad (1)$$

moltiplichiamo e dividiamo il denominatore
per $3x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \ln(1+2x)}{\frac{3x}{3x} \cdot \sin(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \ln(1+2x)}{3x \cdot \frac{\sin 3x}{3x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x)^{-1} \cdot 9 \ln(1+2x)}{\frac{\sin 3x}{3x}} =$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (3x)^{-1} \cdot 9 \ln(1+2x)}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}} \quad (2)$$

$$= \text{Visto che } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(2)

e visto che se $x \rightarrow 0 \Rightarrow 3x \rightarrow 0$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1 \quad (3)$$

per la (3) la (2) diventa

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (3x)^{-1} \cdot 9 \ln(1+2x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \ln(1+2x)}{3x} \quad (4)$$

poniamo $2x = t \Rightarrow x = \frac{t}{2}$

$$3x = 2x + x = t + \frac{t}{2} = \frac{2t + t}{2} = \frac{3}{2} t$$

cioè $3x = \frac{3}{2} t$

Inoltre che $2x = t$ si ha che se $x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0$

Ricavate tutte le sostituzioni necessarie per avere la (4) nella variabile t , si ha

$$(5) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{9 \ln(1+t)}{\frac{3}{2} t} =$$

(3)

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{9 \ln(1+t)}{t} =$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot 9 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \overset{3}{9} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 6 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} =$$

ma $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ (è un limite notevole)

$$= 6 \cdot 1 = 6.$$

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\left(x - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} x \right] \quad (1)$$

poniamo $f = x - \frac{\pi}{2}$ e $g = \operatorname{tg} x$ (2)

e applichiamo la trasformazione

$$\lim_{x \rightarrow c} [f \cdot g] = \frac{\lim_{x \rightarrow c} g}{\lim_{x \rightarrow c} f} \quad (3)$$

Per la trasformazione (3) la (1) diventa

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}} \quad (4)$$

poniamo la sostituzione $y = x - \frac{\pi}{2}$ (5)

$$\Rightarrow x = y + \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

(5)

Inoltre $x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

per la (6) $\frac{\pi}{2} = y + \frac{\pi}{2} ; y=0$

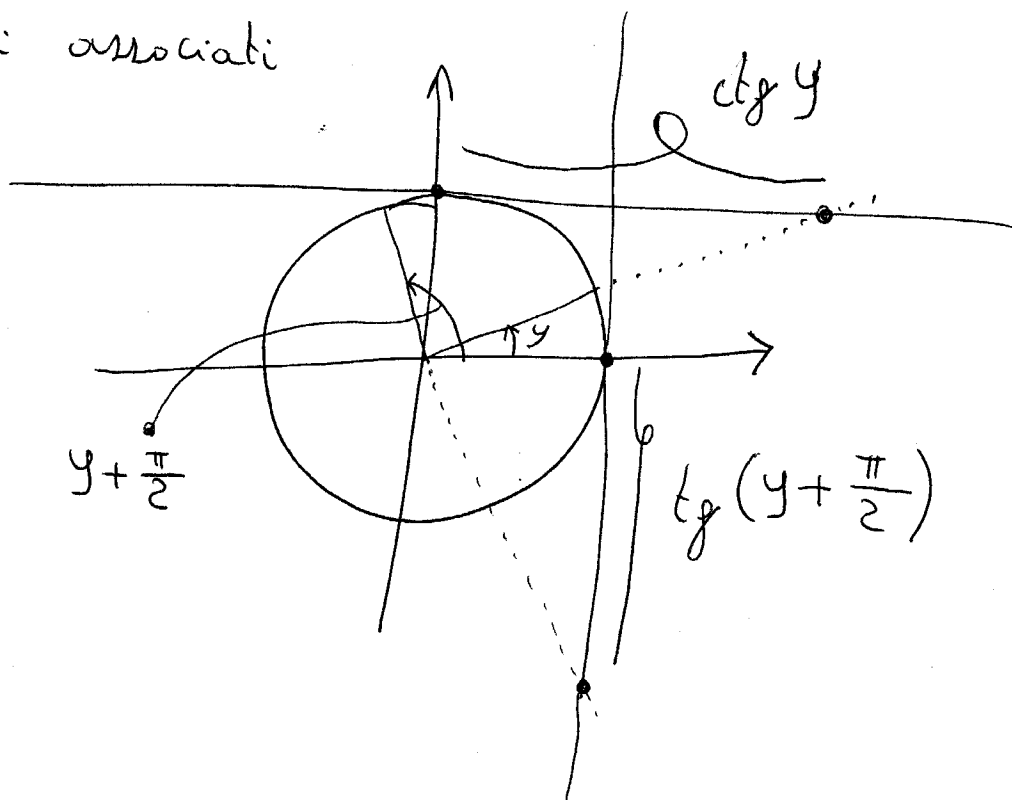
Cioè $y \rightarrow 0$

In definitiva se $x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow y \rightarrow 0$

La (4) in vista delle sostituzioni diviene

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{y}} \quad (7)$$

Analizziamo la (7) in funzione degli
archi associati



si osserva che

$$\operatorname{tg}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} y$$

la (7) diventa

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{ctg} y}{\frac{1}{y}} =$$

$$= -\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} y}{\frac{1}{y}} = -\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos y}{\sin y}}{\frac{1}{y}} =$$

$$= -\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos y}{\sin y} \cdot y = -\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} \cdot \cos y \quad (8)$$

$$= \text{ricordando che il limite notevole } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1,$$

$$\text{si ha che } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

per cui la (8) diventa

$$= - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \cos y =$$

$\downarrow$
1

$$= -1 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \cos y = -1 \cdot 1 = -1.$$

1

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3 \sin^2 x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad ; \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3 \sin^2 x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cancel{\cos x})}{(1 - \cancel{\cos x})(1 + \cos x)} =$$

passando al limite

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$



$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\sin^2 x}}{\cancel{1 - \cos^2 x}} \cdot \frac{\sin^2 x}{1 - \cos^3 x}$$

$$\text{ricordando che } (a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \Rightarrow$$

$$(1 - \cos^3 x) = (1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)$$

$$\text{inoltre } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cancel{\cos x})(1 + \cos x)}{(1 - \cancel{\cos x})(1 + \cos x + \cos^2 x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x + \cos^2 x} = \text{pasamos al límite} \Rightarrow$$

$$= \frac{1 + 1}{1 + 1 + 1} = \frac{2}{3}$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lg x}{x-1}$$

③

poniamo $x-1 = y$ ^① $\Rightarrow x = y+1$ ^②

adesso se $x \rightarrow 1 \Rightarrow$ per le ② che $1 = y+1 \Rightarrow$

$$1-1 = y, \quad y=0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \quad \text{"y tende a 0"}$$

l'esercizio si trasforma:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lg x}{x-1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\lg(y+1)}{y} =$$

• (è un limite notevole che è uguale a 1)

$$= 1.$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \tan x}{\cot^2 x} = \frac{0}{0}$$

ricordando che $\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \tan x}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \tan x) \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

• (per la relazione fondamentale $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$)

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \tan x) \cdot \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \cancel{\tan x}) \cdot \sin^2 x}{(1 - \cancel{\tan x})(1 + \tan x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1 + \tan x} =$$

passiamo al limite

$$= \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{OK}$$

⑤

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} =$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$
limite notu

$$= 1 \cdot 1 = 1$$

(6)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$$

Razionalizziamo $N(x)$ e $D(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2x+1} + 3}{\sqrt{2x+1} + 3} \cdot \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{2}}{\sqrt{x-2} + \sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x+1-9) \cdot (\sqrt{x-2} + \sqrt{2})}{(x-2-2) \cdot (\sqrt{2x+1} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x-8) \cdot (\sqrt{x-2} + \sqrt{2})}{(x-4) \cdot (\sqrt{2x+1} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4) \cdot (\sqrt{x-2} + \sqrt{2})}{(x-4) \cdot (\sqrt{2x+1} + 3)} =$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{2}}{\sqrt{2x+1} + 3} \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{\sqrt{9} + 3} \right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3+3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{OK}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 3x}{\sqrt{1 - \cos 3x}}$$

7

$$3x = y$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{\sqrt{1 - \cos y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin^2 y}}{\sqrt{1 - \cos y}} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\sin^2 y}{1 - \cos y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1 - \cos^2 y}{1 - \cos y}} =$$

$$= \sqrt{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1 - \cancel{\cos y})(1 + \cos y)}{(1 - \cancel{\cos y})}} =$$

$$= \sqrt{\lim_{y \rightarrow 0} (1 + \cos y)} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

OK