

Prof. Francesco Zumbo

www.francescozumbo.it

Esercizi sulle Equazioni e sulle Disequazioni con i Valori Assoluti (detti anche Moduli)

Esercizio

①

$$|2x^2 - 3x| - |7x| \geq 0 \quad (1)$$

Chiamiamo 1° fattore la quantità $2x^2 - 3x$
e 2° fattore la quantità $7x$

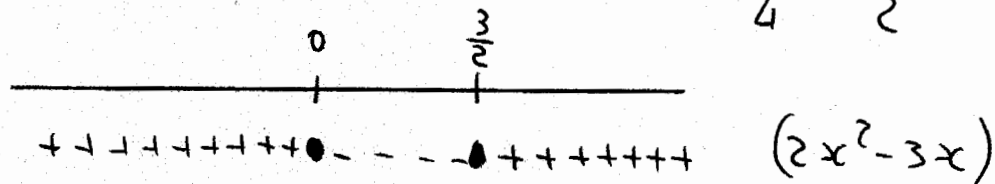
Studiamo $2x^2 - 3x \geq 0$ e $7x \geq 0$

$$2x^2 - 3x \geq 0 \quad ; \quad \Delta = 9 - 0 = 9 > 0$$

Ricordiamo che se la famiglia delle disuguaglianze è ≥ 0
e il Δ è > 0 si hanno soluzioni positive all'esterno
e soluzioni negative all'interno delle soluzioni dell'equazione
associata $2x^2 - 3x = 0$

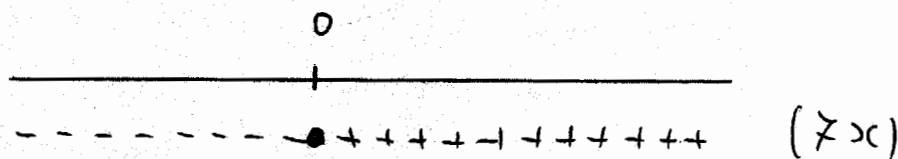
Risoliamo l'equazione associata $2x^2 - 3x = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{3 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{0}{4} = 0 \\ \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$



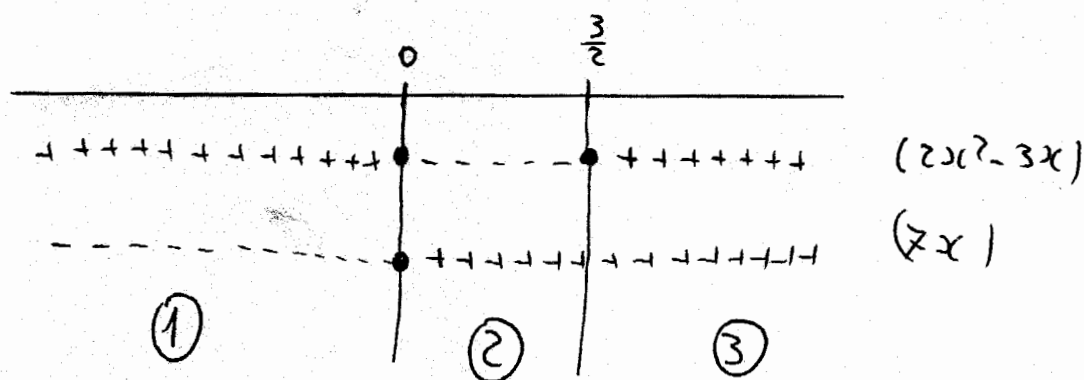
Studiamo il segno di $7x$:

$$7x \geq 0 \quad ; \quad x \geq 0$$



Riassumiamo i grafici:

(2)



A questo punto, risulta lo spazio $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ diviso in 3 sotto-spazi: $]-\infty; 0] \cup]0; \frac{3}{2}[\cup [\frac{3}{2}; +\infty[$

Nel 1° sotto-spazio il fattore $2x^2 - 3x$ è $+$ e il fattore $7x$ è $-$; nel secondo sotto-spazio il fattore $2x^2 - 3x$ è $-$ e $7x$ è $+$; nel sotto-spazio n°3 il fattore $2x^2 - 3x$ è $+$ e il fattore $7x$ è $+$.

Iniziamo lo studio nei rispettivi sotto-spazi.

Studiamo nel 1° sotto-spazio la (1)

$$2x^2 - 3x - (-7x) > 0$$

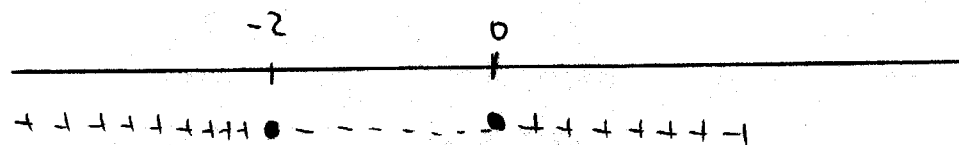
$$2x^2 - 3x + 7x > 0; \quad 2x^2 + 4x > 0; \quad x^2 + 2x > 0 \quad (2)$$

$$\Delta = 4 - 0 = 4 > 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-2 \pm 2}{2} = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$$

grafico di (2)

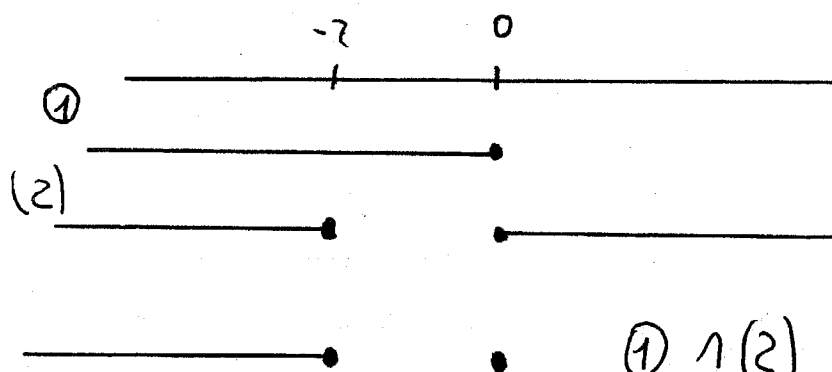
③



e visto che la (2) risolve il ≥ 0 si ha:



La soluzione Analitica (2) ha validità soltanto nell'intervallo ① per cui dobbiamo studiare l'intervallo ① $\wedge (2)$



$$\textcircled{1} \wedge (2) = (3)$$

Passiamo allo studio del sottospazio ②

La (1) nel sottospazio ② diventa:

$$-(2x^2 - 3x) - (7x) \geq 0; (4)$$

$$-2x^2 + 3x - 7x \geq 0; \quad -2x^2 - 4x \geq 0 \quad (*) \text{ detta anche (4)}$$

noi dobbiamo studiare la disuguaglianza $(*)$, al fine risolvere la moltiplichiamo per (-1) , ma essendo che questo poi, dobbiamo successivamente moltiplicare il grafico per (-1) .

④

$-2x^2 - 4x \geq 0 \quad (*)$

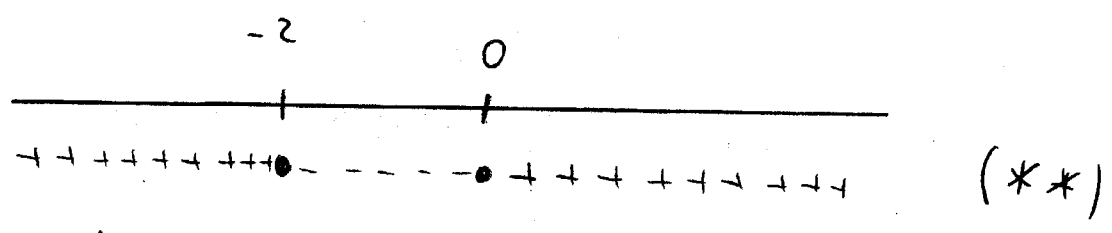
$2x^2 + 4x \leq 0 \quad (**)$

studiamo per il momento $(**)$

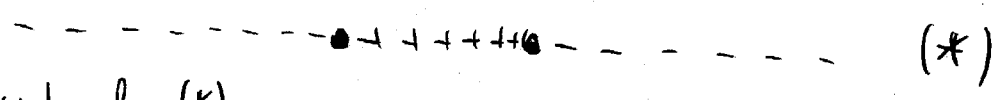
$\Delta = 16 - 0 = 16 > 0$

famiglie ≤ 0 e $\Delta > 0 \Rightarrow +$ all'esterno e $-$ all'interno

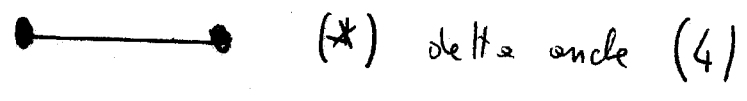
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16}}{4} = \frac{-4 \pm 4}{4} = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$$



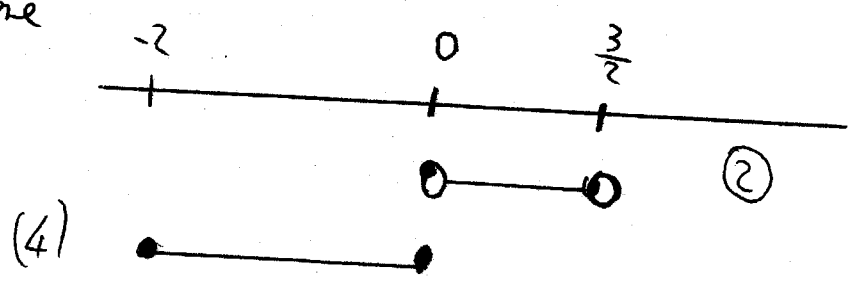
moltiplicando per (-1) otteniamo le soluzioni di $(*)$



Visto che $(*)$ ricerca i valori ≥ 0 si ha:



La soluzione della (4) ha validità soltanto all'interno del 2° sottospazio: $]0, \frac{3}{2}[$, per cui studiamo tale intersezione



$\emptyset = (2) \cap (4) = (5)$

⑤
 Vediamo ciò che accade nel 3° sottaperiodo: $[\frac{3}{2}; +\infty[$
 in tale sottaperiodo la (4) diventa

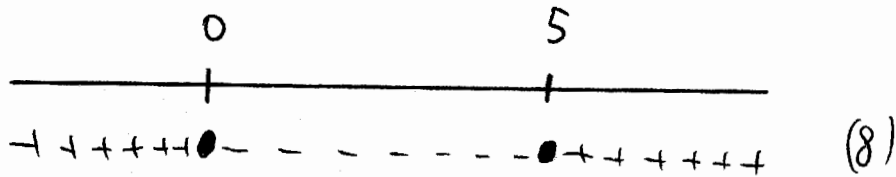
$$2x^2 - 3x - 7x > 0 \quad (6)$$

$$2x^2 - 10x > 0; \quad x^2 - 5x > 0 \quad (7)$$

$$\Delta = 25 - 0 = 25 > 0$$

$\Rightarrow +$ all'esterno e $-$ all'interno

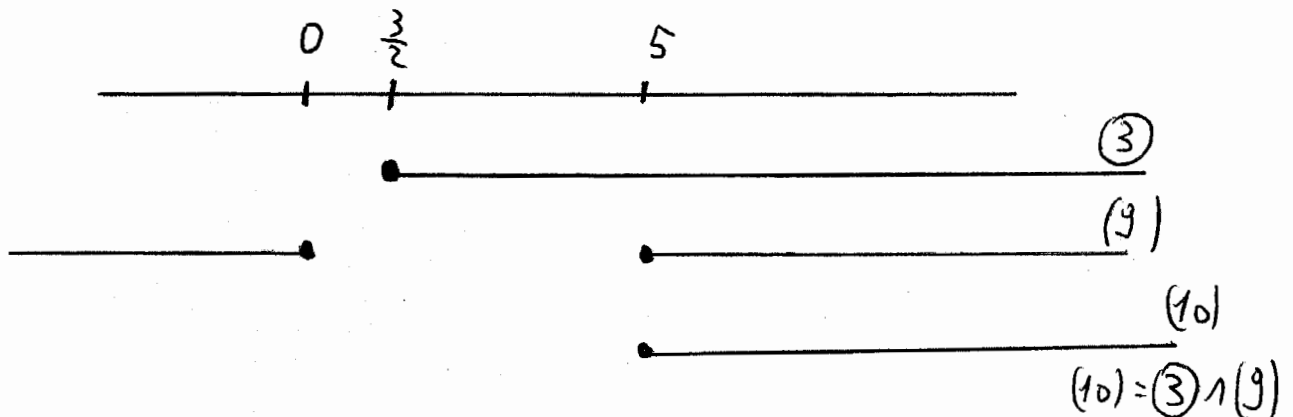
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{5 \pm 5}{2} = \begin{cases} 0 \\ 5 \end{cases}$$



Visto che la (7) richiede i valori ≥ 0 il grafico (8) diventa

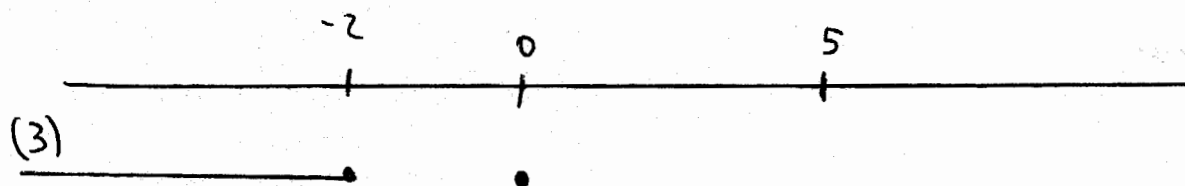


Intanto diamo (9) con il 3° sottaperiodo



Le soluzioni totali dell'esercizio e' state
dall'unione dei 3 problemi: $(3) \cup (5) \cup (10)$

(6)



$$S.T. =]-\infty; -2] \cup [5; +\infty[\cup \{\emptyset\}$$

size

$$x \leq -2 \quad \vee \quad x \geq 5 \quad \vee \quad x = 0$$



Esercizio

7

$$\left| \frac{2-5x}{2x+3} \right| > 7 \quad (1)$$

Studiamo $\frac{2-5x}{2x+3} \geq 0$

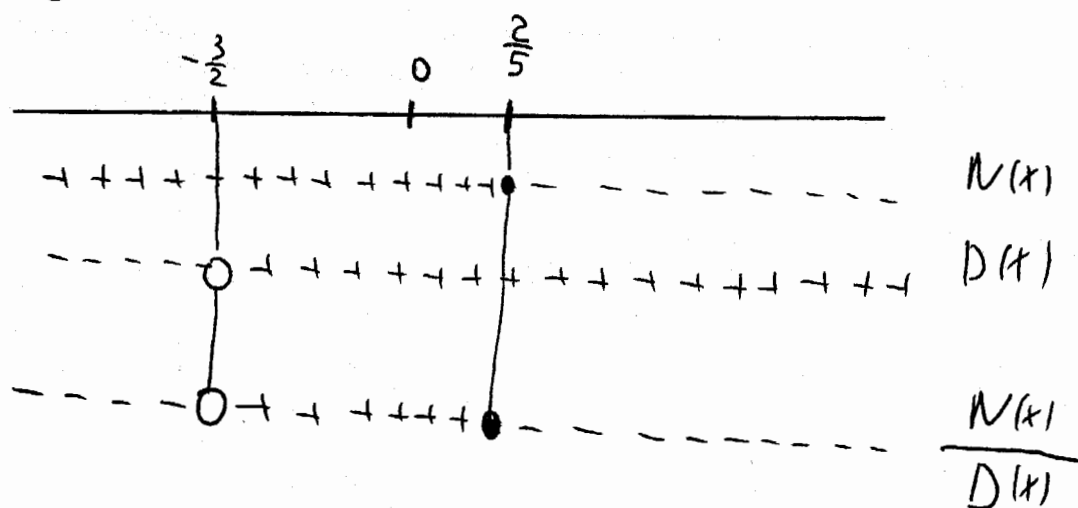
$$N(x) \geq 0 \quad 2-5x \geq 0; \quad -5x \geq -2; \quad 5x \leq 2; \quad x \leq \frac{2}{5}$$

Per $x \leq \frac{2}{5}$ $N(x)$ è ≥ 0

essendo di grado dispari, quando si moltiplica per (-1) non si deve fare nulla al grafico, cioè non si deve moltiplicare il grafico per (-1) .

$$D(x) > 0; \quad 2x+3 > 0; \quad 2x > -3; \quad x > -\frac{3}{2}$$

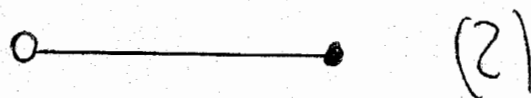
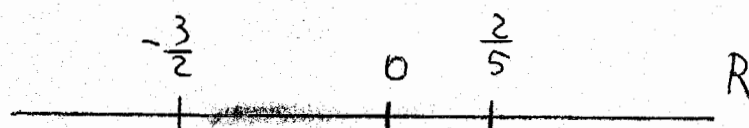
Per $x > -\frac{3}{2}$ $D(x)$ è > 0



Nell'intervallo $-\frac{3}{2} < x \leq \frac{2}{5}$ il fattore in valore assoluto è $+$.

Studiamo la (1) nell'intervallo:

⑧



in tale intervallo la (1) diventa:

$$\frac{2-5x}{2x+3} > 7; \quad \frac{2-5x}{2x+3} - 7 > 0$$

$$\frac{2-5x-7(2x+3)}{2x+3} > 0; \quad \frac{2-5x-14x-21}{2x+3} > 0$$

$$\frac{-13x-19}{2x+3} > 0 \quad (3)$$

Studiamo $N(x) > 0$

$$-13x-19 > 0; \quad -13x > 19; \quad 13x < -19; \quad x < -1$$

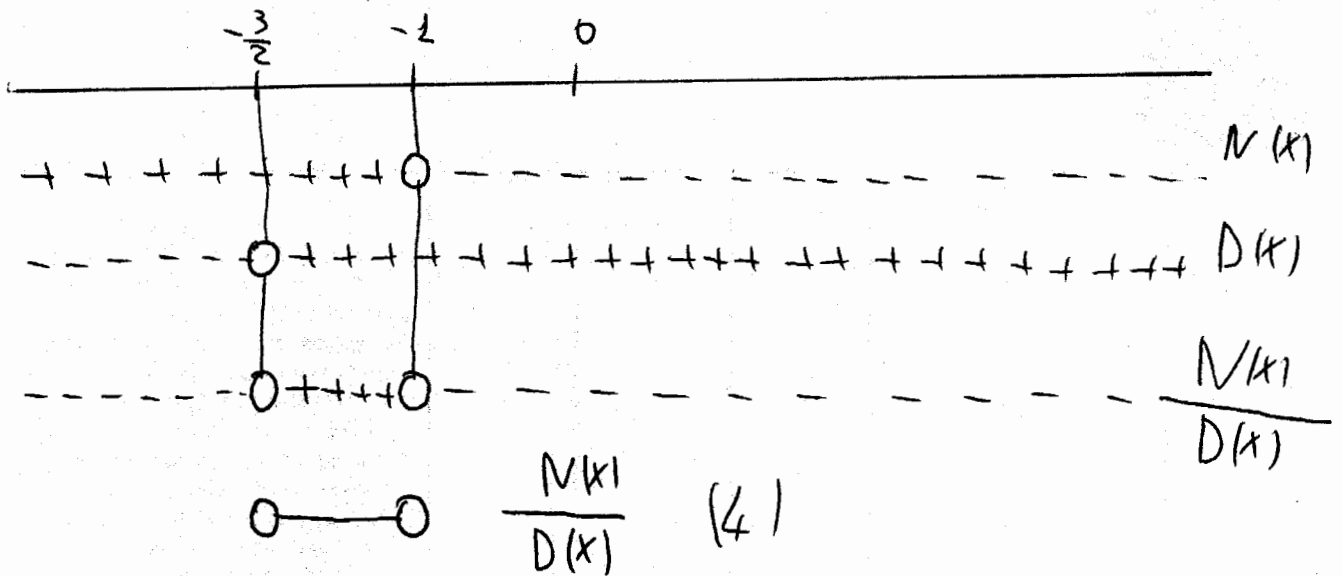
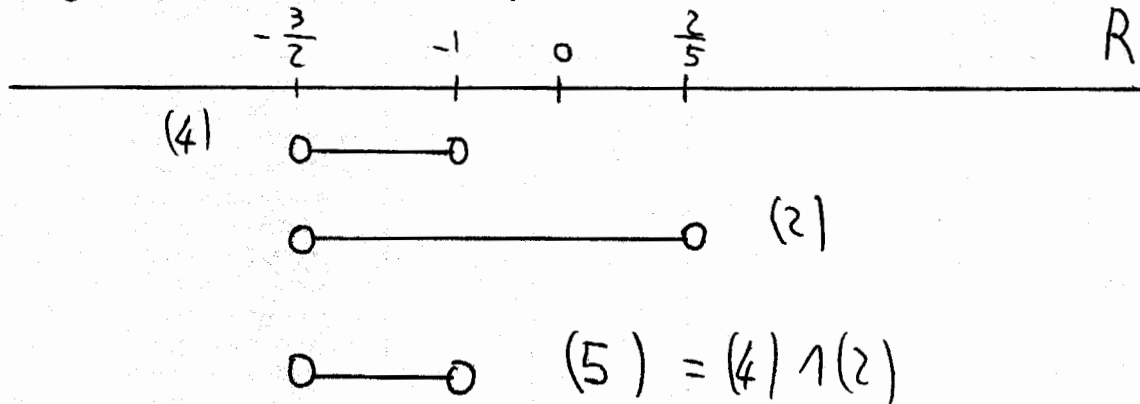
$$\text{Per } x < -1 \Rightarrow N(x) > 0$$

Studiamo $D(x) > 0$

$$2x+3 > 0; \quad 2x > -3; \quad x > -\frac{3}{2}$$

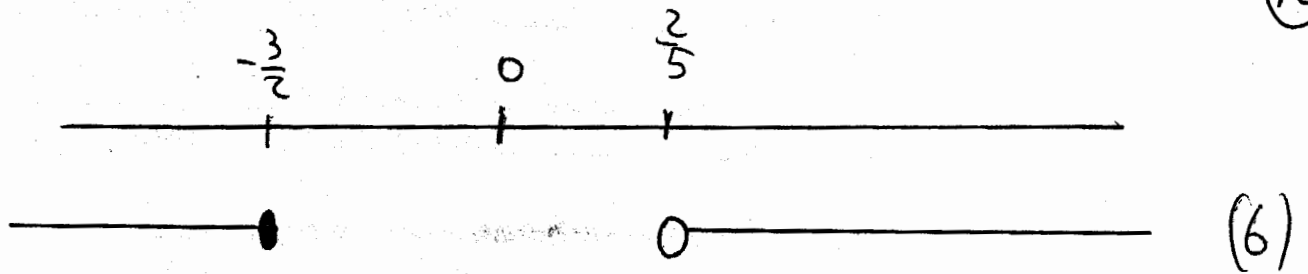
$$\text{Per } x > -\frac{3}{2} \Rightarrow D(x) > 0$$

(9)

Studiamo $\frac{N(x)}{D(x)}$ Studiamo l'intersezione (4) $\cap$ (2)Studiamo adesso la (1) ~~per~~ con la condizione

$$\frac{2-5x}{2x+3} < 0$$

Il risultato è ovviamente il complementare del
 grafico (2) cioè è: $\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{3}{2}; \frac{2}{5}\right]$



nel grafico (6) si ha che $\frac{2-5x}{2x+3} < 0$.

Per cui ha (1) rispetto al grafico (6) soluzione:

$$-\frac{2-5x}{2x+3} > 7 \quad (5) \quad -\frac{2-5x}{2x+3} - 7 > 0 \quad (6)$$

$$\frac{-(2-5x) - 7(2x+3)}{2x+3} > 0$$

$$\frac{-2+5x-14x-21}{2x+3} > 0$$

$$\frac{-9x-23}{2x+3} > 0 \quad (7)$$

Stacchiamo $N(x) > 0$

$$-9x-23 > 0; \quad -9x > 23; \quad \text{~~23 < 0~~}$$

$$9x < -23; \quad x < -\frac{23}{9}$$

Per $x < -\frac{23}{9} \Rightarrow N(x) > 0$

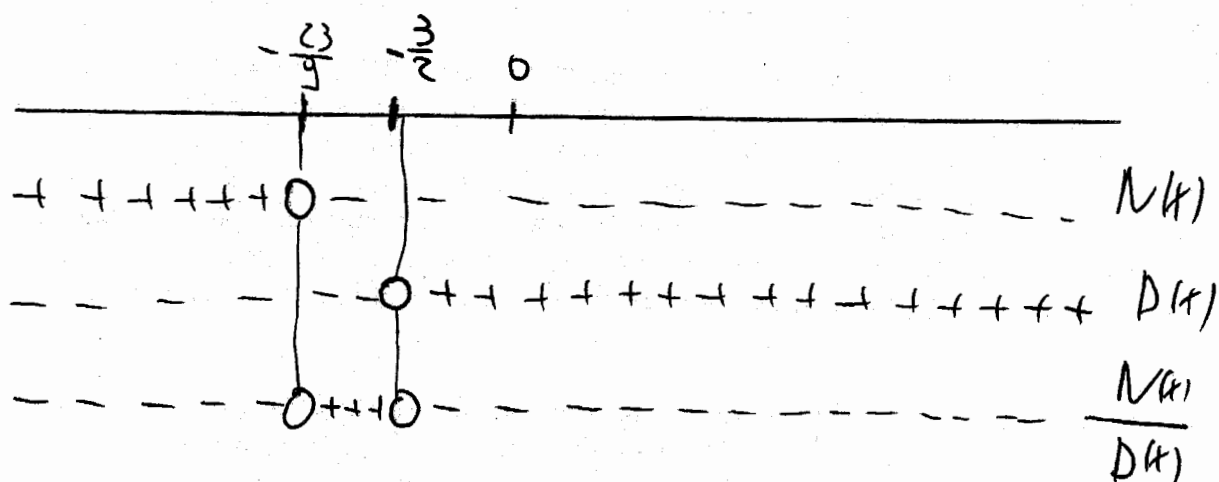
(1)

Studiamo $D(x) > 0$

$2x + 3 > 0 ; 2x > -3 ; x > -\frac{3}{2}$

Per $x > -\frac{3}{2} \Rightarrow D(x) > 0$

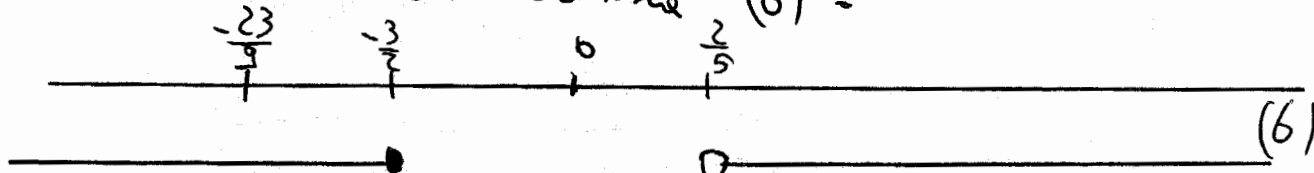
Studiamo $\frac{N(x)}{D(x)}$



Siccome stiamo studiando la (5) si ha:

$\bigcirc \text{---} \bigcirc$ (8)

e tale soluzione analitica la abbiamo interseca con le condizioni di esistenza (6):

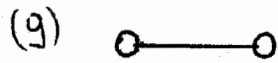
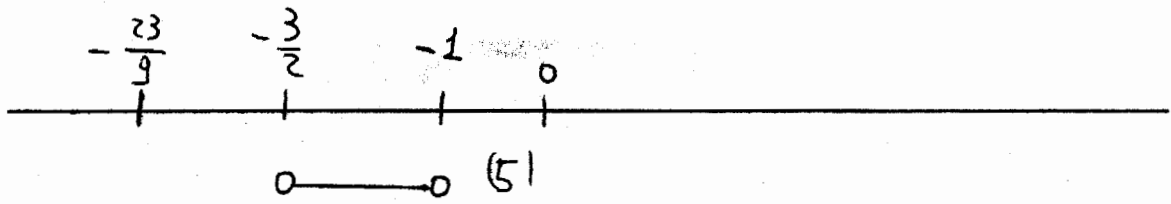


(8) $\bigcirc \text{---} \bigcirc$

$\bigcirc \text{---} \bigcirc$ (6) $\cap$ (8) = (9)

Per cui la soluzione totale dell'esercizio
 è data dall'unione del grafico (5) con il
 grafico (9)

(12)



(5) $\cup$ (9) = Soluzione Totale

$$\left] -\frac{23}{9}; -\frac{3}{2} \right[\cup \left] -\frac{3}{2}; -1 \right[\quad \text{cioè}$$

$$-\frac{23}{9} < x < -\frac{3}{2} \cup -\frac{3}{2} < x < -1 \quad \text{cioè}$$

$$\left] -\frac{23}{9}; -1 \right[\setminus \left] -\frac{3}{2} \right[$$



Esercizio

13

$$|3x-5| = 2x+1 \quad (1)$$

Studiamo la condizione 1: $3x-5 \geq 0$

$3x \geq 5$; $x \geq \frac{5}{3}$. Per $x \geq \frac{5}{3}$ $|3x-5|$ equivale

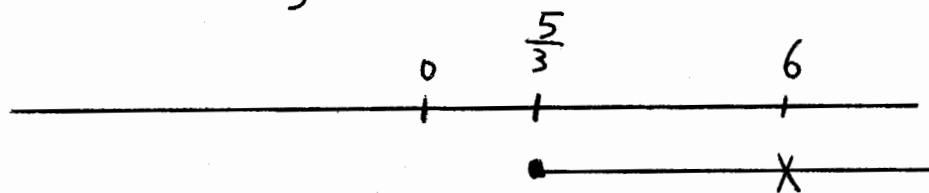
a scrivere $3x-5$.

Sotto la condizione $x \geq \frac{5}{3}$ la (1) diventa

$$3x-5 = 2x+1 \quad (2)$$

$$3x - 2x = 5+1 \quad ; \quad x = 6$$

Per essere valide tale soluzione deve essere all'interno della condizione $x \geq \frac{5}{3}$ (3)



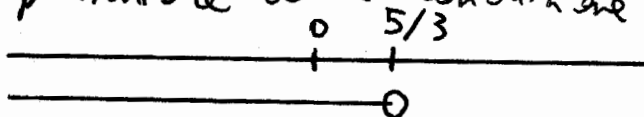
(4) $x=6$ è sol.



Studiamo la condizione 2. Il grafico della condizione 2 è il complementare della condizione 1.

Cioè è $x < \frac{5}{3}$

(5)



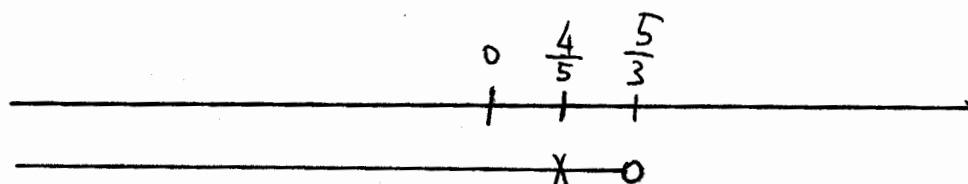
L'equazione (1) sotto la condizione 2 divisione

$$-(3x-5) = 2x+1 \quad (6)$$

$$-3x+5 = 2x+1 ; -3x-2x = -5+1 ; -5x = -4 ;$$

$$5x = 4 ; x = \frac{4}{5} \quad (7)$$

Il valore $x = \frac{4}{5}$ è soluzione se e soltanto se appartiene alla condizione (5)



$$x = \frac{4}{5}$$

La soluzione totale è data dall'unione

$$x = 6 \quad \vee \quad x = \frac{4}{5} \quad \bigcup$$

Esercizio

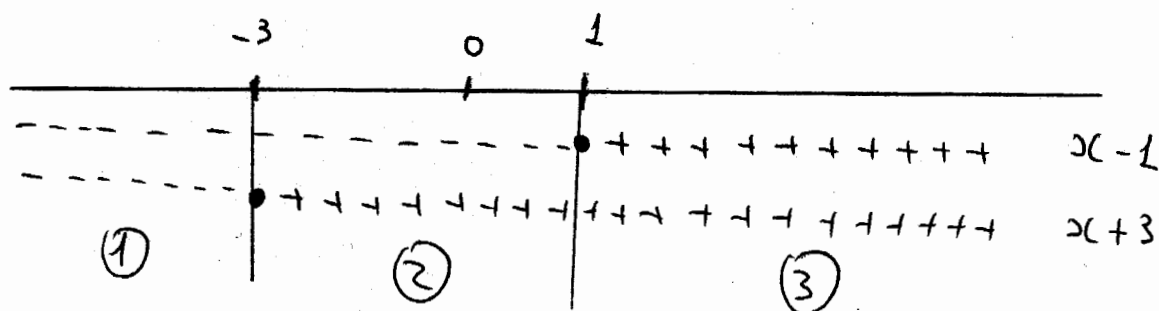
15

$$|x-1| - 2|x+3| = 7x \quad (1)$$

Studiamo prima $x-1 \geq 0$ e poi $x+3 \geq 0$

$$x-1 \geq 0; \quad x \geq 1 \quad (2)$$

Studiamo $x+3 \geq 0; \quad x \geq -3$



Subdividiamo lo spazio $\mathbb{R}$ in 3 sotto-spazi

$$]-\infty; -3[\cup [-3; 1[\cup [1; +\infty[$$

Nel sotto-spazio (1) la (1) diventa

$$\cancel{-(x-1)} - (x-1) - 2[-(x+3)] = 7x$$

$$-x+1-2[-x-3] = 7x$$

$$-x+1+2x+6 = 7x$$

$$-x+2x-7x = -1-6$$

$$-4x = -7 \quad ; \quad x = \frac{7}{4} = 1,75$$

$x = \frac{7}{4} \notin$ al 2° sistema (1) quindi
non è soluzione.

Nel 2° sistema (2) la (1) diventa

$$-(x-1) - 2(x+3) = 7x;$$

$$-x + 1 - 2x - 6 = 7x; \quad -x - 2x - 7x = -1 + 6;$$

$$-10x = 5; \quad x = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}; \quad x = -\frac{1}{2}$$

$\boxed{x = -\frac{1}{2}} \in$ al 2° sistema (2) $\Rightarrow$ è soluzione

Nel 3° sistema (3) la (1) diventa

$$x - 1 - 2(x+3) = 7x;$$

$$x - 1 - 2x - 6 = 7x; \quad -8x = 1 + 6;$$

$$-8x = 7; \quad x = -\frac{7}{8} = -0,875$$

$x = -\frac{7}{8} \notin$ al 3° sistema quindi
non è soluzione.

In definitiva la soluzione totale dell'esercizio è

$$x = -\frac{1}{2}$$

Esercizio

17

$$\left| \frac{x-4}{3-2x} \right| > \frac{4x+7}{3-2x} - 2 \quad (1)$$

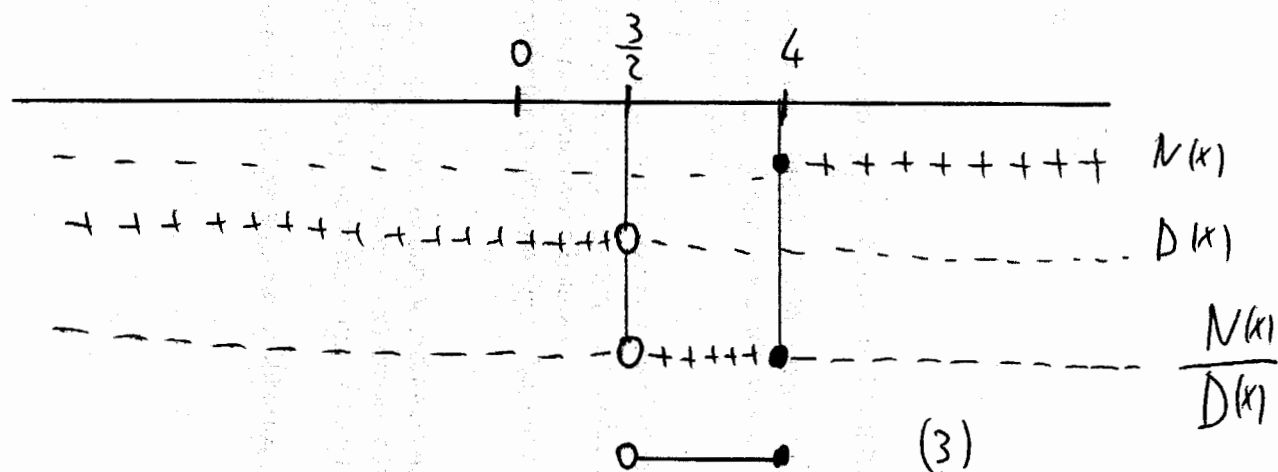
Prima parte dell'esercizio, (>0):

$$\frac{x-4}{3-2x} > 0 \quad (2)$$

$$N(x) > 0 ; x-4 > 0 ; x > 4$$

$$D(x) > 0 ; 3-2x > 0 ; -2x > -3, 2x < 3, x < \frac{3}{2}$$

$$\text{per } x < \frac{3}{2} \Rightarrow D(x) \text{ è } > 0$$



$$\text{Se } x \in \left] \frac{3}{2}; 4 \right] \Rightarrow \text{scrivere } \left| \frac{x-4}{3-2x} \right| \text{ equivale}$$

$$\text{a scrivere } \frac{x-4}{3-2x}$$

Studiamo le (1) in tale intervallo $[\frac{3}{2}; 4]$

(18)

$$\frac{x-4}{3-2x} \geq \frac{4x+7}{3-2x} - 2 \quad (4)$$

$$\frac{x-4}{3-2x} - \frac{4x+7}{3-2x} + 2 \geq 0$$

$$\frac{x-4-(4x+7)+2(3-2x)}{3-2x} \geq 0$$

$$\frac{x-4-4x-7+6-4x}{3-2x} \geq 0$$

$$\frac{-7x-5}{3-2x} \geq 0 \quad (5)$$

Studiamo $N(x) \geq 0$

$$-7x-5 \geq 0; -7x \geq 5; 7x \leq -5; 7x \leq -5;$$

$$x \leq -\frac{5}{7}. \text{ Per } x \leq -\frac{5}{7} \Rightarrow N(x) \geq 0$$

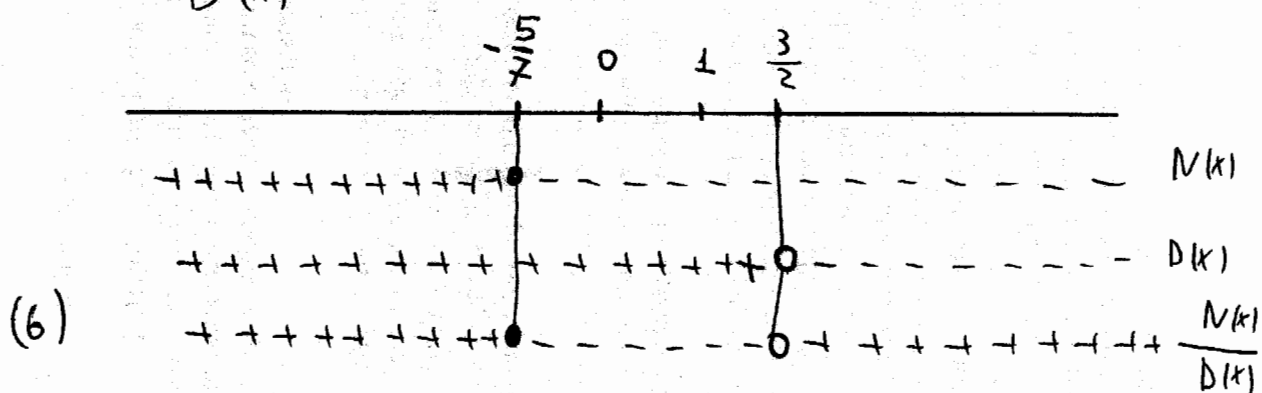
Studiamo $D(x) > 0$

$$3-2x > 0, -2x > -3, 2x < 3, x < \frac{3}{2}$$

$$\text{per } x < \frac{3}{2} \Rightarrow D(x) > 0$$

Studiando $\frac{N(x)}{D(x)}$

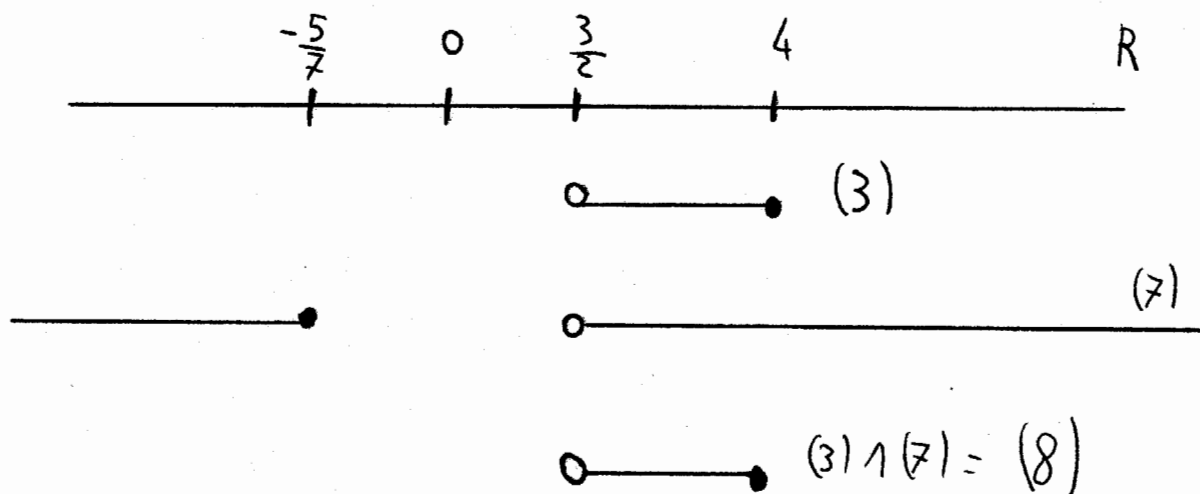
(19)



Visto che la (5) ricerca i valori ≥ 0 si ha:



La soluzione delle prime parte dell'esercizio è data dall'intersezione tra il grafico (3) che rappresenta le condizioni dell'esistenza delle prime parte dell'esercizio, e la soluzione analitica (7).



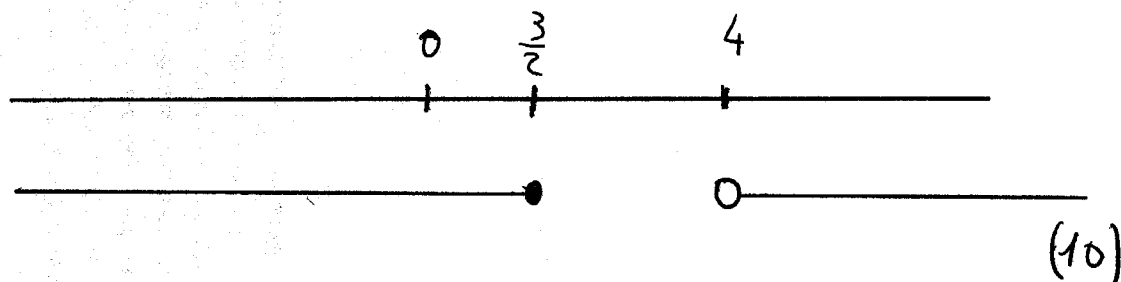
La (8) rappresenta la prima parte della soluzione dell'esercizio.

Seconda parte dell'esercizio (< 0)

avremmo studiato $\frac{x-4}{3-2x} < 0$ (9)

ma abbiamo studiato e trovato $\frac{x-4}{3-2x} \geq 0$

~~per~~ il grafico delle (9) vale visivamente
il complementare delle (3):



La (1) sotto le condizioni (9) di grafico (10)
diviene

$$-\frac{x-4}{3-2x} \geq \frac{4x+7}{3-2x} - 2 \quad (11)$$

$$-\frac{x-4}{3-2x} - \frac{4x+7}{3-2x} + 2 \geq 0$$

$$\frac{-(x-4) - (4x+7) + 2(3-2x)}{3-2x} \geq 0$$

$$\frac{-x+4-4x-7+6-4x}{3-2x} \geq 0$$

$$\frac{-9x+3}{3-2x} \geq 0 \quad ; \quad \frac{-9x+3}{3-2x} \geq 0 \quad (12)$$

Studiamo

$$N(x) \geq 0 \quad -9x+3 \geq 0; \quad -9x \geq -3; \quad 9x \leq 3;$$

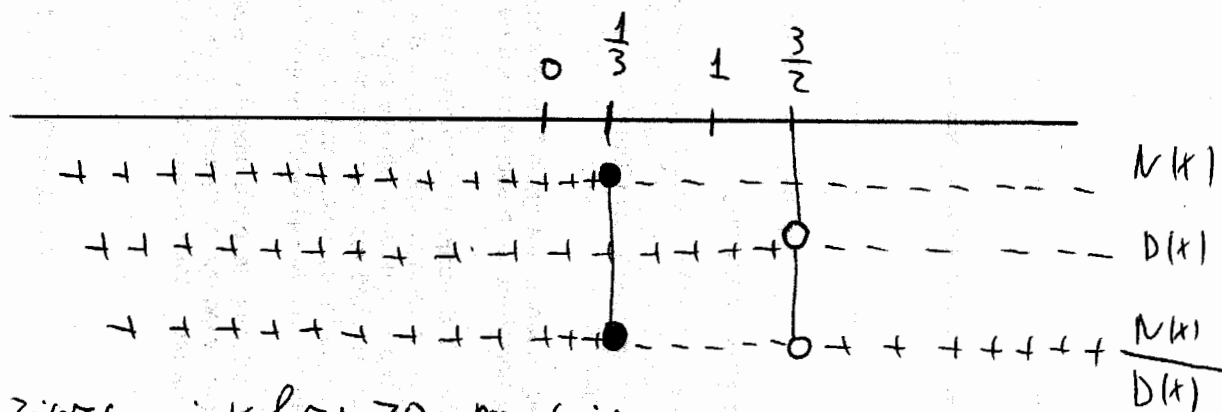
$$x \leq \frac{1}{3} \quad . \quad \text{Per } x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow N(x) \geq 0$$

Studiamo $D(x) > 0$

$$3-2x > 0; \quad -2x > -3, \quad 2x < 3, \quad x < \frac{3}{2}$$

$$\text{Per } x < \frac{3}{2} \Rightarrow D(x) > 0$$

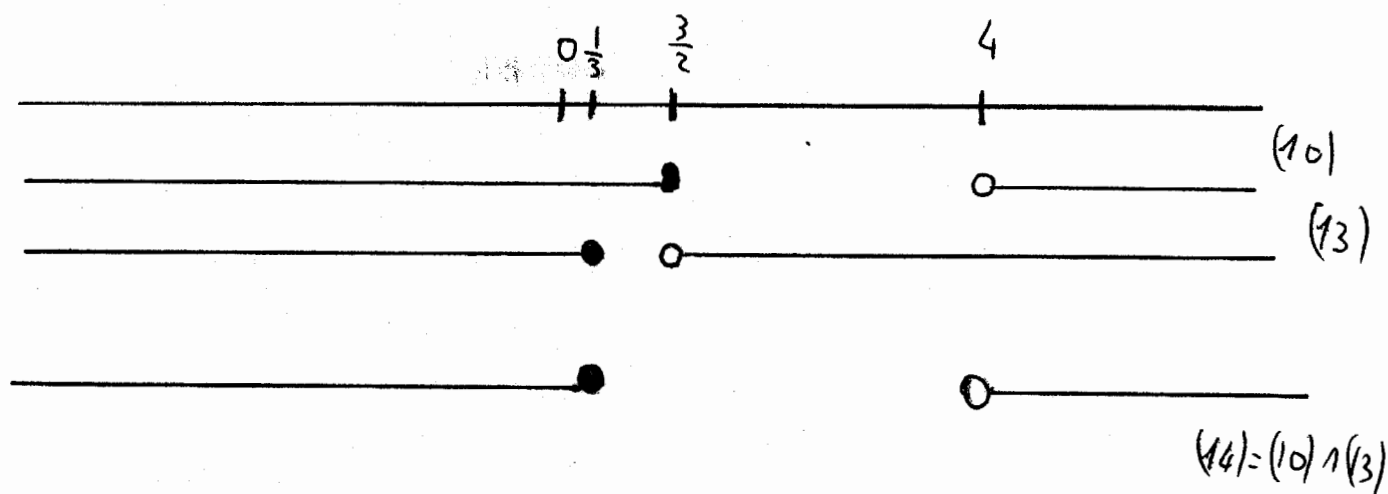
Studiamo $\frac{N(x)}{D(x)}$



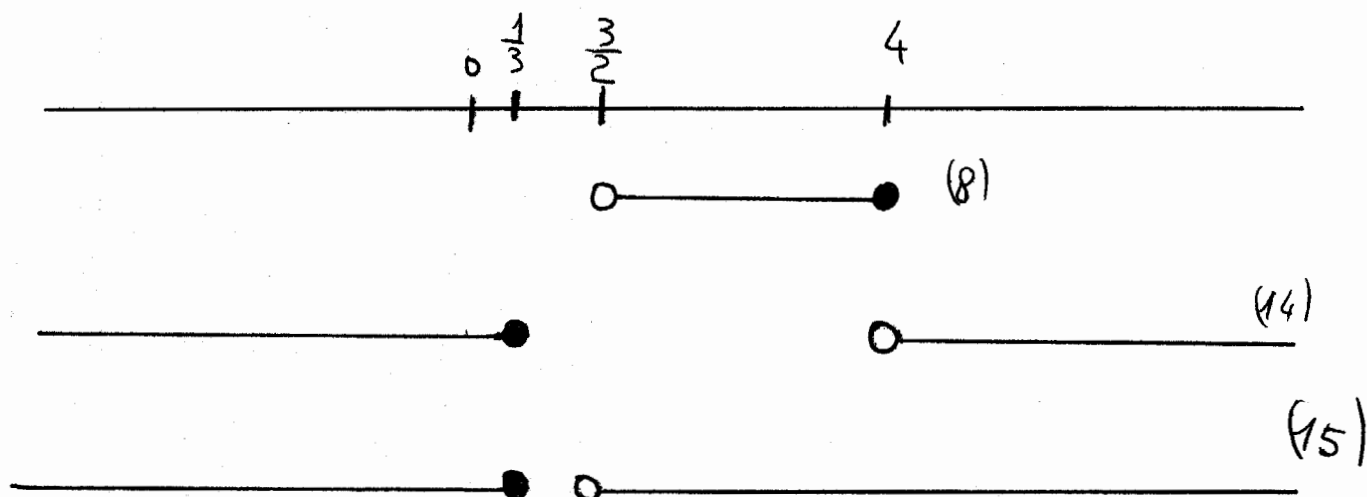
Le (12) zerche i valori ≥ 0 per cui:



La soluzione delle seconda parte dell'esercizio è data dall'intersezione $(10) \cap (13)$:



A questo punto, la soluzione totale dell'esercizio è data dall'unione tra le (14) e le (8)



$$\left] -\infty; \frac{1}{3} \right] \cup \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[\quad \text{cioè} \quad x < \frac{1}{3} \vee x > \frac{3}{2}$$

$$\left] -\infty; \frac{1}{3} \right] \cup \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$$



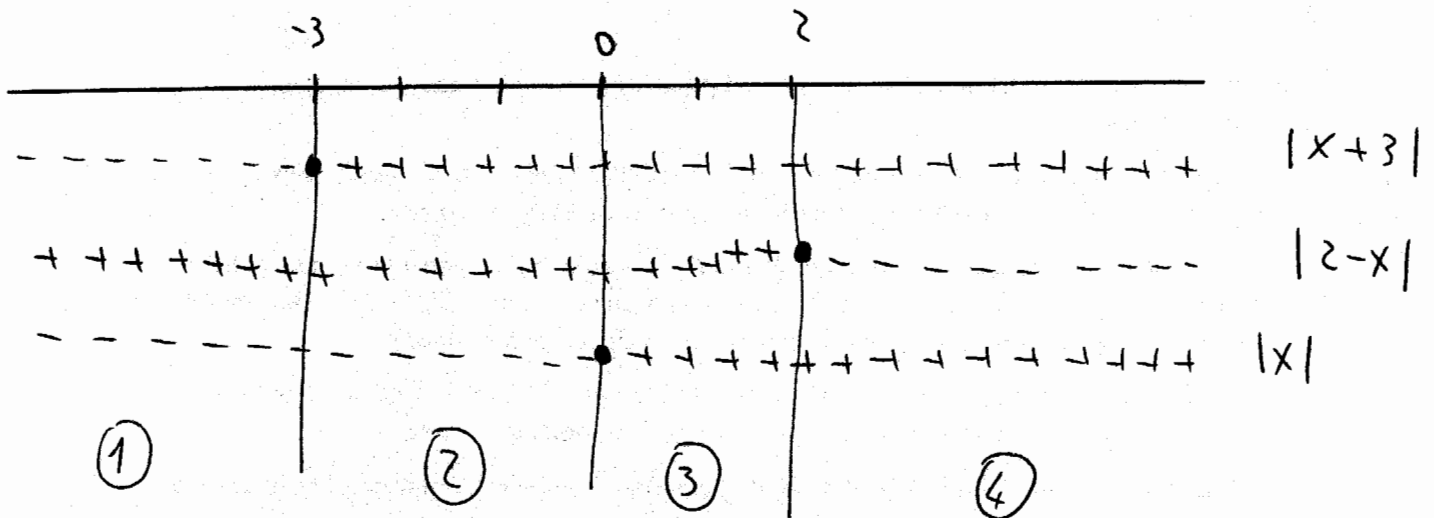
Esercizio

(23)

$$\frac{|x+3| + |2-x|}{x^2 - 2|x| - 3} \geq 0 \quad (1)$$

Studiamo i segni dei 3 moduli.

- $x+3 \geq 0$, $x \geq -3$ per $x \geq -3$ $x+3 \geq 0$
- $2-x \geq 0$, $-x \geq -2$, $x \leq 2$
per $x \leq 2 \Rightarrow 2-x \geq 0$
- $x \geq 0$



Tutto sommato 2. tratto di soluzione 4. tratto escluso

Nel terzo passo ① 2. ha le le (1) divisione

$$\frac{-(x+3)+2-x}{x^2-2[-x]-3} \geq 0 \quad (2)$$

$$\frac{-x-3+2-x}{x^2+2x-3} \geq 0 ; \quad \frac{-2x-1}{x^2+2x-3} \geq 0$$

$$N(x) \geq 0 ; \quad -2x-1 \geq 0 ; \quad -2x \geq 1 ; \quad 2x \leq -1 ; \quad x \leq -\frac{1}{2}$$

$$\text{per } x \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow N(x) \geq 0$$

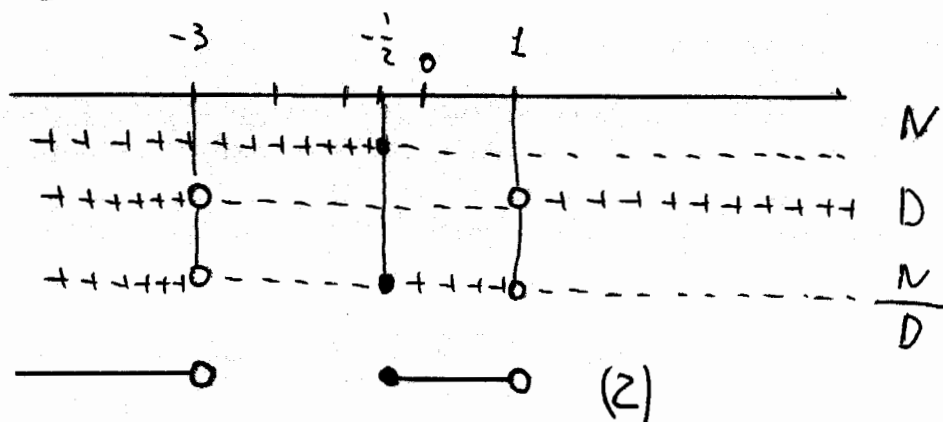
$$D(x) > 0$$

$$x^2+2x-3 > 0, \quad \Delta = 4-4(1)(-3) = 4+12 = 16$$

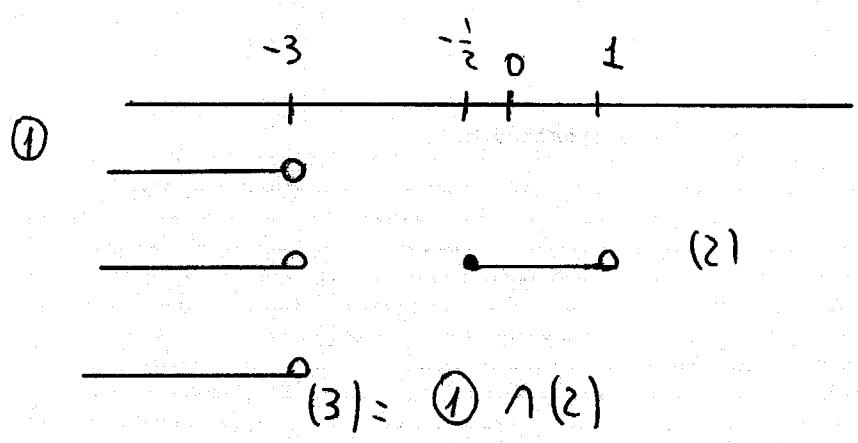
$$x = \frac{-2 \pm 4}{2} = \frac{x(-1 \pm 2)}{x} = -1 \pm 2 = \begin{cases} -1-2 = -3 \\ -1+2 = +1 \end{cases}$$

Famiglia > 0 e $\Delta > 0 \Rightarrow$ soluzioni + all'esterno e - all'interno

Stazioni $\frac{N}{D}$



Intorcediamo il grafico (2) con il rettangolo (1)



Studiamo la (1) nel rettangolo (2)

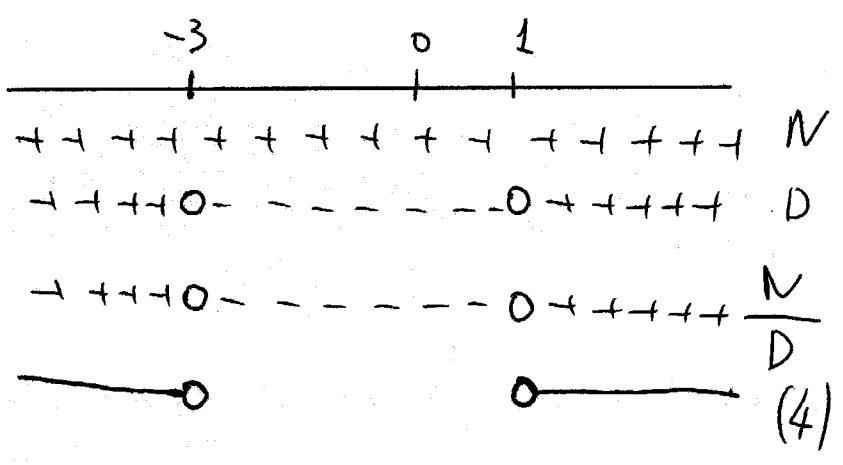
$$\frac{x+3+x-2}{x^2-2(-x)-3} \geq 0$$

$$\frac{5}{x^2+2x-3} \geq 0 \quad (3)$$

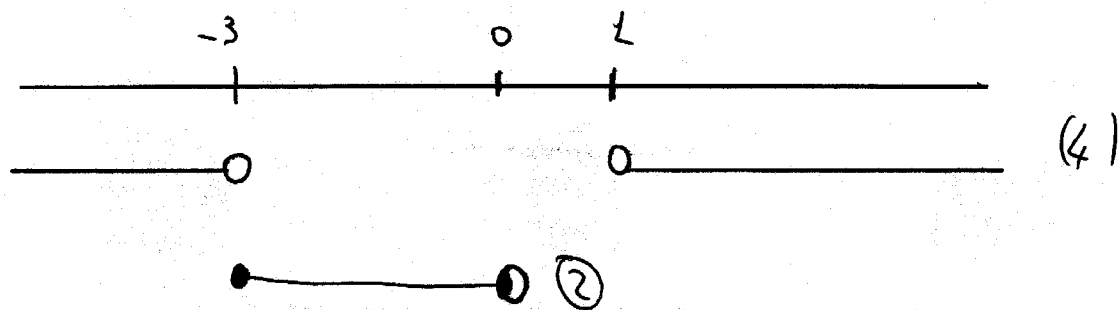
$N(x)$ è sempre +

$D(x) > 0 \quad x^2+2x-3 > 0, \Delta = 4 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16$

$D(x) > 0$ lo abbiamo già studiato in precedenza



Intorcediamo la (4) con il moltiplicando (2)



L'intersezione è $\emptyset$ (5)

Studiamo la (1) nel moltiplicando (3)

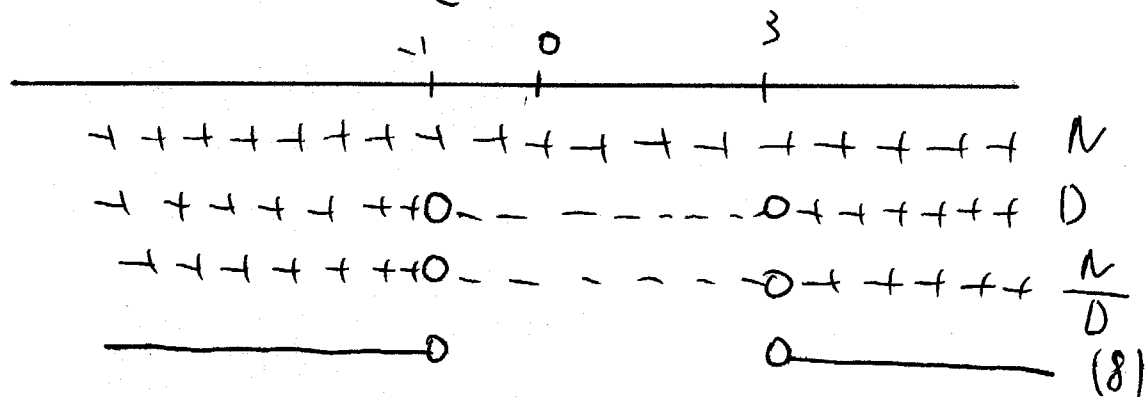
$$\frac{x+3+2-x}{x^2-2x-3} \geq 0 \quad (6)$$

$$\frac{5}{x^2-2x-3} \geq 0 \quad (7)$$

$N(x)$ sempre

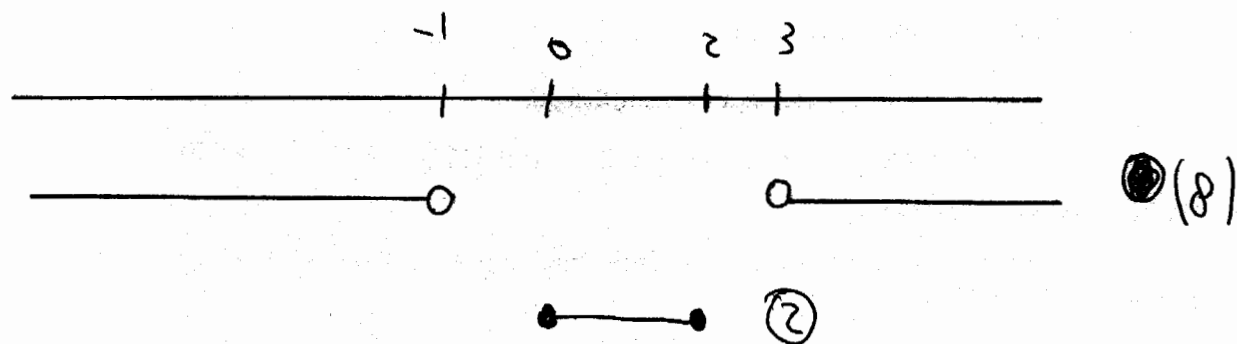
$D(x) > 0 \quad x^2 - 2x - 3 > 0, \quad \Delta = 4 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16$

$$x = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$



Studiamo l'intersezione tra le (8) e il
sottospazio (3)

(22)



L'intersezione è $\emptyset$ tra (8) e (2): $(8) \cap (2) = \emptyset$ (9)

Studiamo la (1) nel sottospazio (4)

$$\frac{x+3-(2-x)}{x^2-2x-3} \geq 0 \quad (10)$$

$$\frac{x+3-2+x}{x^2-2x-3} \geq 0$$

$$\frac{2x+1}{x^2-2x-3} \geq 0 \quad (11)$$

Studiamo

$$N(x) \geq 0$$

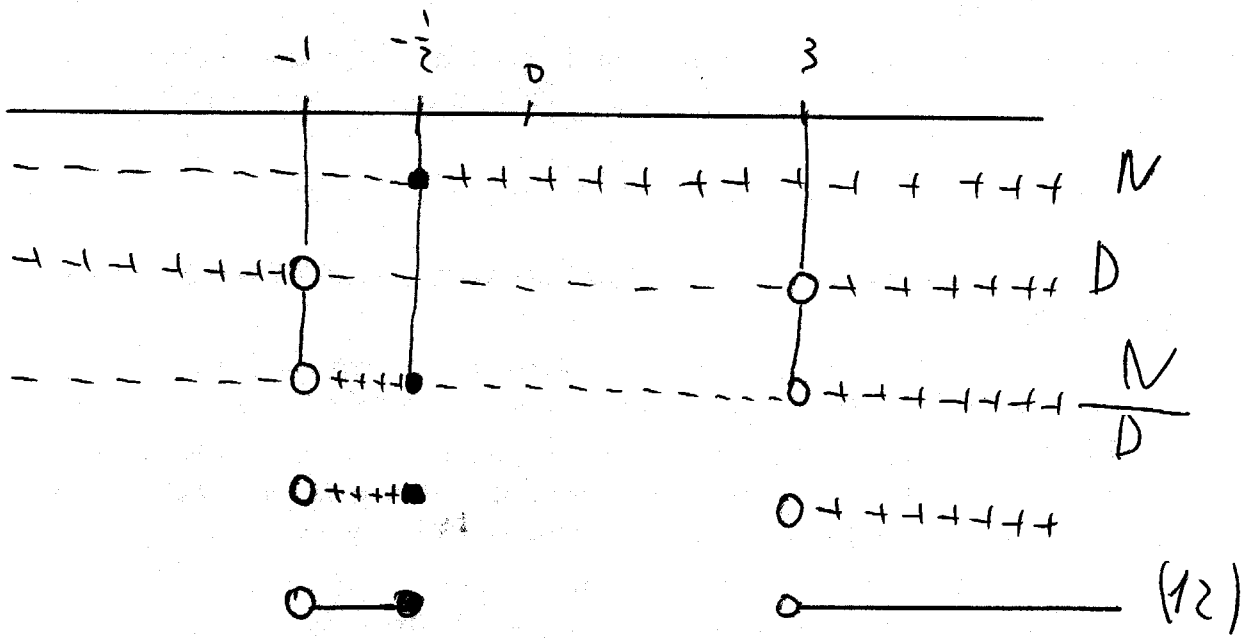
$$2x(x+1) \geq 0, \quad 2x \geq -1, \quad x \geq -\frac{1}{2}$$

per $x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow$ che $N(x) \geq 0$

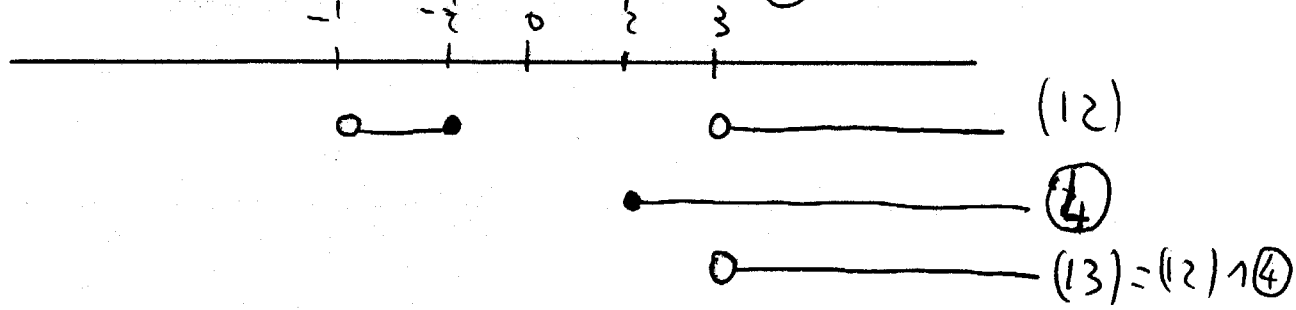
$$D(x) > 0 \quad x^2 - 2x - 3 > 0, \quad \Delta = 4 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16 > 0$$

$D(x)$ è stata già studiata in precedenza nelle (7)

Studiamo $\frac{N(x)}{D(x)}$



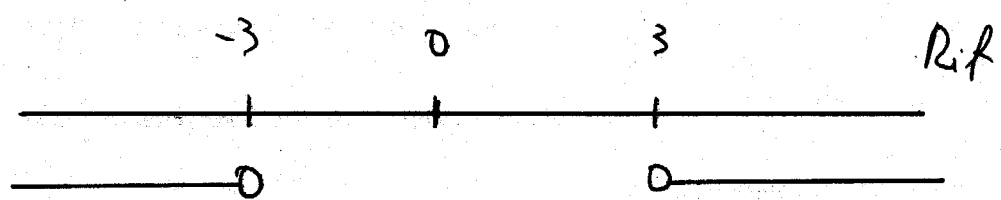
Intersechiamo le (12) con la (4)



La soluzione totale dell'esercizio è
data dalla seguente unione

$$(14) = (13) \cup (9) \cup (5) \cup (3)$$

$$(14) =]3; +\infty[\cup \emptyset \cup \emptyset \cup]-\infty; -3[$$



La soluzione totale è

$$S.T. = (14) =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$$

