Equazioni Goniometriche
e Esercizi Svolti

Prof. Francesco Zumbo

www.francescozumbo.it

- Equazioni goniometriche elementari
- Equazioni goniometriche riconducibili ad elementari
- Equazioni goniometriche lineari
- Equazioni goniometriche riconducibili a lineari
- Soluzione grafica delle equazioni goniometriche lineari
- Equazioni goniometriche omogenee
- Equazioni goniometriche riconducibili a omogenee
- Soluzione grafica delle equazioni goniometriche omogenee
- Equazioni goniometriche simmetriche

Angolo orientato		Funzioni goniometriche		
gradi	radianti	seno	coseno	tangente
0°	0	0	1	0
9°	$\frac{\pi}{20}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
15°	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
18°	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$
22°30’	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
36°	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
54°	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
72°	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
75°	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\to \pm\infty$

Capitolo 3

Geometria

3.1 Goniometria

3.1.1 Relazione Fondamentale

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

3.1.2 Tangente e Cotangente: Definizioni

Definizione 32 (Tangente) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Definizione 33 (Cotangente 1) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \forall x \neq k\pi$

Definizione 34 (Cotangente 2) $\cot x = \frac{1}{\tan x} \forall x \neq k\frac{\pi}{2}$

3.1.3 Secante e Cosecante: Definizioni

Definizione 35 (Secante) $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$
$\sec : \mathbb{R} \setminus \{\frac{pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$

Definizione 36 (Cosecante) $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$
$\csc : \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$

3.1.4 Formule di Addizione

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$
$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\alpha \pm \cot\beta}$

3.1.5 Formule di Duplicazione e di Triplicazione

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
$\tan(3\alpha) = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

3.1.6 Formule di Bisezione

$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

3.1.7 Formule Parametriche

$$t \overset{def}{=} \tan\frac{\alpha}{2} \longrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

3.1.8 Formule di Prostaferesi

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$
$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

3.1.9 Formule di Werner

$\cos p \cdot \sin q = \frac{1}{2}[\sin(p+q) - \sin(q-p)]$
$\sin p \cdot \sin q = \frac{1}{2}[\sin(p-q) - \cos(p+q)]$
$\cos p \cdot \cos q = \frac{1}{2}[\cos(p+q) + \cos(p-q)]$

3.1.10 Formule di Conversione

☛ Tabella 3.1 a pag.19

3.1.11 Archi Noti

☛ Tabella 3.2 a pag.19

$\swarrow$	Sin	Cos	Tan
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\tan\alpha$
$\cot\alpha$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$
$\sec\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}$
$\csc\alpha$	$\frac{1}{\sin\alpha}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$

Tabella 3.1: Formule di Conversione

Rad	Deg	Sin	Cos	Tan	Cot
0	$0°$	0	1	0	n.e.
$\frac{\pi}{12}$	$15°$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{8}$	$22°30'$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3}{8}\pi$	$67°30'$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$
$\frac{5}{12}\pi$	$75°$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$90°$	1	0	n.e.	0

Tabella 3.2: Archi noti

Rad	Sin	Cos	Tan	Cot
x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\pi - x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$\pi + x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$2\pi - x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$\frac{\pi}{2} - x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$\tan x$
$\frac{\pi}{2} + x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$
$\frac{3}{2}\pi - x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cot x$	$\tan x$
$\frac{3}{2}\pi + x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$

Tabella 3.3: Archi associati

3.1.12 Archi Associati

☛ Tabella 3.3 a pag.19

3.2 Trigonometria

3.2.1 Triangolo Qualsiasi

Area: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$

$S = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{1}{2}b^2\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{1}{2}c^2\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

Teorema 2 (Formula di Erone) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Teorema 3 (Formula di Brahmagupta o di Erone) *Dato un quadrilatero ciclico (cioè inscrivibile in una circonferenza) di lati a, b, c, d e semiperimetro $p = \frac{a+b+c+d}{2}$, l'area vale $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$; per $d = 0$, in particolare, si ottiene la formula di Erone per il triangolo.*

Teorema 4 (delle Corde) *:* $\bar{AB} = 2r\sin\alpha$

Teorema 5 (dei Seni) *:* $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha} = 2R = \frac{abc}{4S}$

Proiezioni: $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$;
$b = a\cos\gamma + c\cos\alpha$;
$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$.

Teorema 6 (di Carnot o del Coseno) *:*
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$;
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$;
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

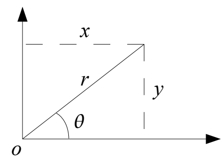
3.2.2 Triangolo Rettangolo

Se a,b e c sono le misure rispettivamente dell'ipotenusa e dei cateti di un triangolo rettangolo e α , β e γ sono le misure degli angoli opposti, sussistono le seguenti relazioni:

$b = a\sin\beta = a\cos\gamma$
$c = a\sin\gamma = a\cos\beta$
$b = c\tan\beta = c\cot\gamma$
$c = b\tan\gamma = b\cot\beta$

Tavola di relazioni trigonometriche

Funzioni trigonometriche dell'angolo



$$\sin\theta=\frac{y}{r} \qquad \cos\theta=\frac{x}{r} \qquad \tan\theta=\frac{y}{x} \qquad \cot\theta=\frac{x}{y} \qquad cosec\,\theta=\frac{1}{\sin\alpha} \qquad sec\,\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$$

la funzione seno è dispari, la funzione coseno è pari, la funzione tangente è dispari.

Relazioni fondamentali

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Espressione delle funzioni goniometriche mediante una di esse

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\sin\alpha=$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\cos\alpha=$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\pm\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$
$\tan\alpha=$	$\pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\tan\alpha$	$\frac{1}{\cot\alpha}$
$\cot\alpha=$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$	$\cot\alpha$

Angoli associati, complementari e che differiscono di π/2

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$	$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$
$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$	$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$
$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$	$\tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha$	$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$
$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$	$\cot(2\pi-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$
$\sin(\pi/2-\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(\pi/2-\alpha)=\sin\alpha$	$\tan(\pi/2-\alpha)=\cot\alpha$	$\cot(\pi/2-\alpha)=\tan\alpha$
$\sin(\pi/2+\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(\pi/2+\alpha)=-\sin\alpha$	$\tan(\pi/2+\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\pi/2+\alpha)=-\tan\alpha$

Formule di addizione e sottrazione

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta} \qquad \cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp 1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$$

Formule di duplicazione, triplicazione e bisezione

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos^2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1 \qquad \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha \qquad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha \qquad \tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Formule parametriche

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

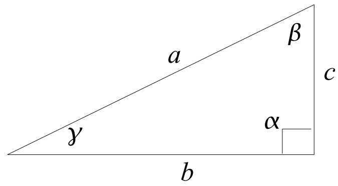
Formule di prostaferesi

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2} \qquad \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Formule di Werner

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$ $\quad$ $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$ $\quad$ $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

Teoremi sui triangoli



Triangoli rettangoli

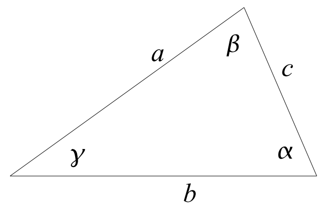
$b=a\sin\beta$ $\quad$ $c=a\sin\gamma$ $\quad$ $b=c\tan\beta$ $\quad$ $c=b\tan\gamma$

$b=a\cos\gamma$ $\quad$ $c=a\cos\beta$ $\quad$ $b=c\cot\gamma$ $\quad$ $c=b\cot\beta$

Teorema di Pitagora

$$a^2=b^2+c^2$$

Triangoli qualsiasi



Teorema dei seni

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2\mathrm{R}$$

Teorema delle proiezioni

$a=b\cos\gamma+c\cos\beta$ $\quad$ $b=c\cos\alpha+a\cos\gamma$ $\quad$ $c=a\cos\beta+b\cos\alpha$

Teorema del coseno o di Carnot

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ $\quad$ $b^2=c^2+a^2-2ca\cos\beta$ $\quad$ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$

Altro

Sviluppo di Taylor delle funzioni trigonometriche

$\sin\vartheta=\vartheta-\frac{\vartheta^3}{3!}+\frac{\vartheta^5}{5!}+\ldots$ $\quad$ $\cos\vartheta=1-\frac{\vartheta^2}{2!}+\frac{\vartheta^4}{4!}+\ldots$

Formule di Eulero (esponenziale complesso)

$e^{\pm i\vartheta}=\cos\vartheta\pm i\sin\vartheta$ $\quad$ $\sin\vartheta=\frac{e^{i\vartheta}-e^{-i\vartheta}}{2i}$ $\quad$ $\cos\vartheta=\frac{e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}}{2}$

Funzioni iperboliche

$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{\sin(i\vartheta)}{i}$ $\quad$ $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cos(i\vartheta)$ $\quad$ $\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

il seno iperbolico è dispari, il coseno iperbolico è pari, la tangente iperbolica è dispari.

Valori delle funzioni trigonometriche di angoli particolari

gradi	radianti	seno	coseno	tangente	cotangente
0°	0	0	1	0	non definita
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	non definita	0
180°	π	0	-1	0	non definita
270°	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	non definita	0
360°	2π	0	1	0	non definita

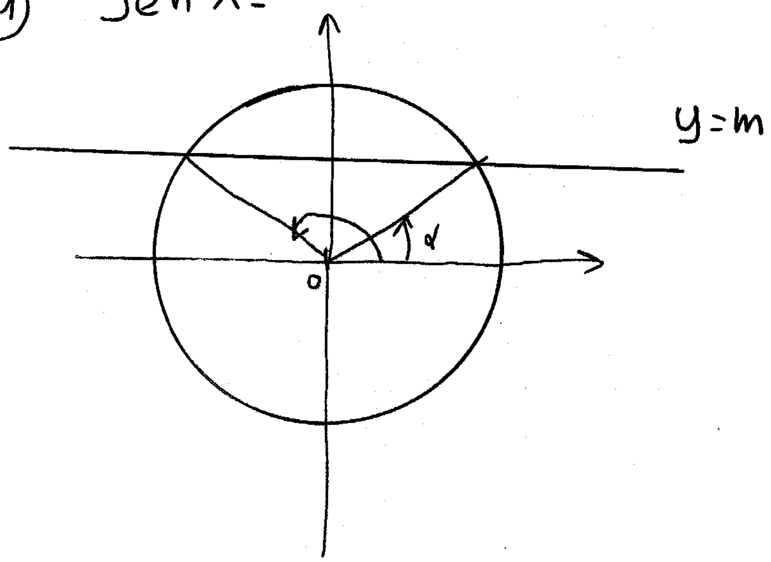
Definizione: Una equazione si dice goniometrica se ci sono funzioni goniometriche nei cui argomenti compaiono incognite.

Equazioni Elementari

Sono del tipo: $\operatorname{sen} x = m$; $\cos x = m$; $\operatorname{tg} x = m$; $\operatorname{ctg} x = m$

1) $\operatorname{Sen} x = m$ con $-1 \leq m \leq 1$

Se $m: |m| > 1$ l'equazione è impossibile.



E' fondamentale ricordare che il seno lo si stima sempre sull'asse Y mentre il coseno lo si stima sempre sull'asse X.

se α è soluzione $\Rightarrow$ anche $\pi - \alpha$ è soluzione

cioè

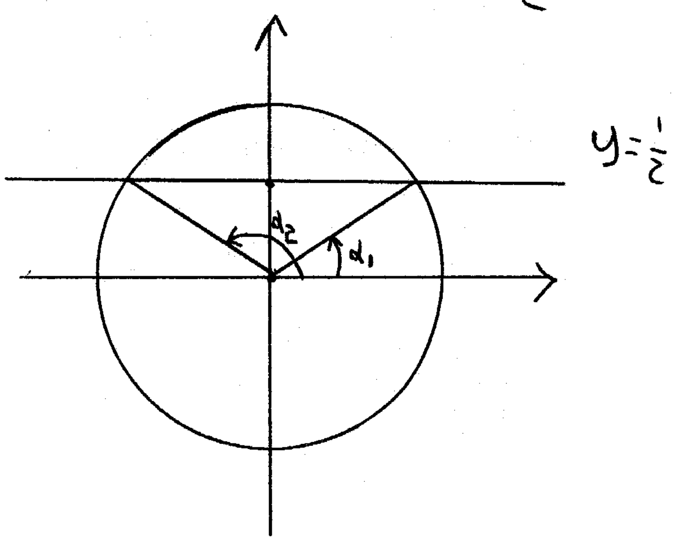
$X_1 = \alpha$ e $X_2 = \pi - \alpha$ sono soluzioni

Inoltre la funzione seno è una funzione periodica di periodo 2π, per cui

$$X_1 = \alpha + K2\pi \qquad e \qquad X_2 = \pi - \alpha + K2\pi$$

Esempio

Risolvere $\operatorname{sen} X = \frac{1}{2}$



Dai valori del seno si osserva che $\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$

cioè $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$X_1 = \frac{\pi}{6} \qquad e \qquad X_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

Applicando il periodo 2π

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + K2\pi \quad e \quad x_2 = \frac{5}{6}\pi + K2\pi$$

Esempio $\quad sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$

Visto che dai valori del seno soltanto $sen\frac{\pi}{2} = 1$

possiamo scrivere

$$sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}\,; \quad x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi - \pi}{6} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}\pi}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

aggiungendo la periodicità $x = \frac{\pi}{3} + K\pi$.

Esempio

$$\operatorname{sen} x = -\frac{2}{3}$$

Nella tabella dei valori notevoli del seno non vi è il valore $-\frac{2}{3}$ quindi dobbiamo applicare la funzione arcsen ad ambo i membri

$$\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{2}{3}\right) \quad ;$$

$$x = \operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{2}{3}\right)$$

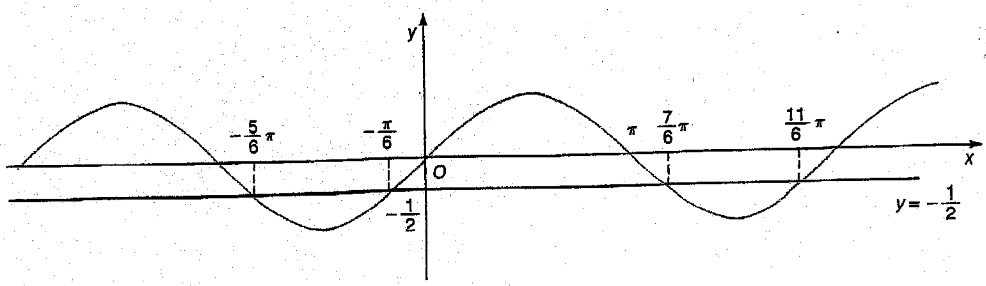
Per calcolare tale valore si procede con la calcolatrice scientifica

$$x = \operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{2}{3}\right) = -41{,}81^\circ \quad \Rightarrow$$

$$x_1 = -41{,}81^\circ \quad \text{e} \quad x_2 = 180 - (-41{,}81) = 221{,}81^\circ$$

Quindi le soluzioni sono

$$x_1 = -41{,}81^\circ + K\,360 \quad \text{e} \quad x_2 = 221{,}81^\circ + K\,360^\circ$$



In modo simile si risolvono:

$\boxed{\operatorname{sen} hx = m}$ (1)

se α è soluzione => da (1)

(2) $hx = \alpha + K2\pi$ e

$hx = \pi - \alpha + K2\pi$ (3)

da (2)

$$x = \frac{\alpha}{h} + K\frac{2\pi}{h}$$

da (3)

$$x = \frac{\pi - \alpha}{h} + K\frac{2\pi}{h}$$

Equazioni del tipo

$\operatorname{sen} hx = \operatorname{sen} tx$

1) $hx = tx + k2\pi$ e 2) $hx = \pi - tx + k2\pi$

da 1)

$hx - tx = k2\pi$

$x(h-t) = k2\pi$

$$x = \frac{k2\pi}{h-t}$$

da 2) $hx + tx = \pi + k2\pi$;

$x(h+t) = \pi + k2\pi$; $x = \dfrac{\pi}{h+t} + \dfrac{k2\pi}{h+t}$

Esempio

$$\operatorname{sen} 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Visto che dalle tabelle dei valori del seno

$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ si ha

$\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow$

1) $2x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \; ; \; x = \frac{\pi}{8} + k\pi$

2) $2x = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \; ; \; x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} + k\pi \; ;$

$x = \frac{4\pi - \pi}{8} + k\pi \; ; \; x = \frac{3}{8}\pi + k\pi$

Esempio

$$\operatorname{sen} 5x = \operatorname{sen} 3x$$

1) $5x = 3x + k2\pi$; $5x - 3x = k2\pi$;

$2x = k2\pi$; $x = k\pi$

2) $5x = \pi - 3x + k2\pi$; $5x + 3x = \pi + k2\pi$;

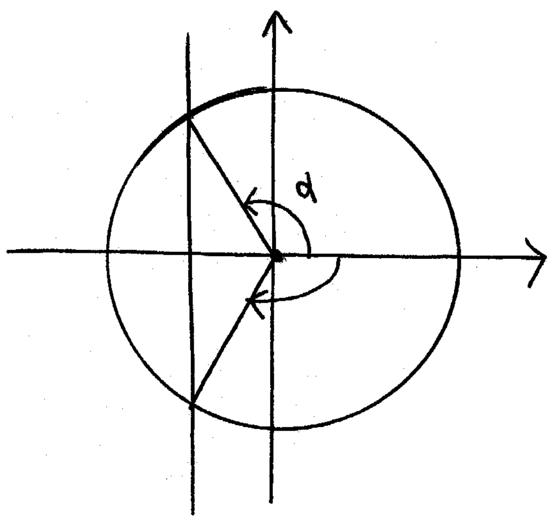
$8x = \pi + k2\pi$; $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\cancel{2}\pi}{\cancel{8}_4}$;

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$$

Equazioni del tipo

$$\cos x = m$$

Osservazione: Ricordiamo che il coseno di un angolo lo si stima sempre sull'asse delle ascisse.

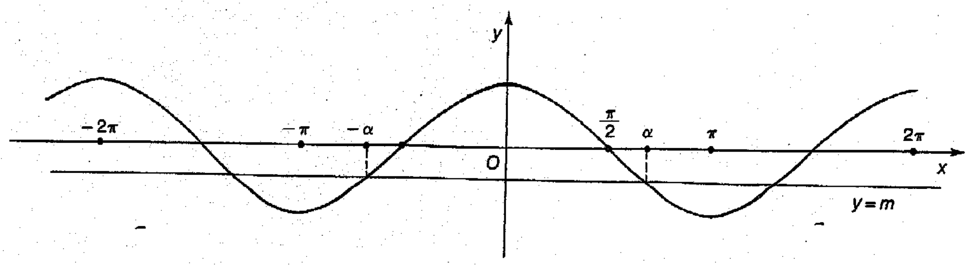


Si osserva dal grafico che se α è soluzione anche −α è soluzione.

Il periodo della funzione coseno è 2π

Per cui

1) $x = \alpha + k2\pi$ e 2) $x = -\alpha + k2\pi$



Esempio $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Dai valori del coseno sappiamo $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

da cui

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{4}$$

1) $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ e 2) $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$

Le riflessioni sulle equazioni del tipo

$$\cos hx = m \quad e \quad \cos hx = \cos Kx$$

sono simili a quelle del seno, con l'importante differenza che il coseno si stima sull'asse delle X e il seno sull'asse delle Y.

Esempio

$$\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$$

Dalla tabella dei valori del coseno si ha:

$$\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$$

Da cui

$$\cos\frac{x}{2} = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$

1) $\frac{x}{2} = \frac{2}{3}\pi + K2\pi$; $x = \frac{4}{3}\pi + 2K2\pi$; $x = \frac{4}{3}\pi + K4\pi$

2) $\frac{x}{2} = \left(-\frac{2}{3}\pi\right) + K2\pi$; $x = -\frac{4}{3}\pi + K4\pi$

Esempio

$$\cos 7x = \cos\frac{x}{3}$$

1) $7x = \frac{x}{3} + K2\pi$; $7x - \frac{x}{3} = K2\pi$; $x\left(7 - \frac{1}{3}\right) = K2\pi$;

$x\left(\frac{21-1}{3}\right) = K2\pi$; $\frac{20}{3}x = K2\pi$; $x = \frac{3}{\cancel{20}_{10}} K\cancel{2}\pi$;

$x = \frac{3}{10}K\pi$

2) $7x = -\frac{x}{3} + k2\pi$

$7x + \frac{x}{3} = k2\pi$; $x\left(7 + \frac{1}{3}\right) = k2\pi$; $x\left(\frac{21+1}{3}\right) = k2\pi$;

$x\left(\frac{22}{3}\right) = k2\pi$; $x = \frac{3}{\cancel{22}_{11}} k\cancel{2}\pi$; $x = \frac{3}{11} k\pi$

Esempio

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

1) $2x - \frac{\pi}{6} = x + \frac{\pi}{4} + k2\pi$;

$2x - x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + k2\pi$; $x = \frac{2\pi + 3\pi}{12} + k2\pi$;

$x = \frac{5}{12}\pi + k2\pi$

e

2) $2x - \frac{\pi}{6} = -x - \frac{\pi}{4} + k2\pi$;

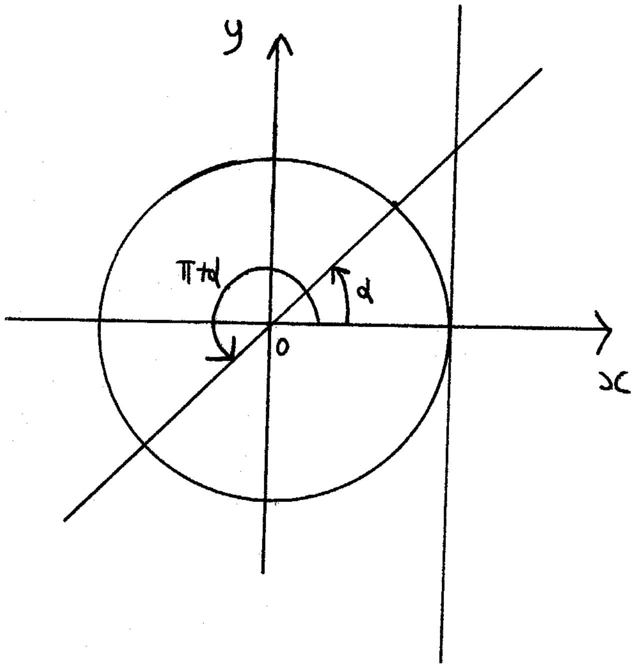
$2x + x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + k2\pi$; $3x = \frac{2\pi - 3\pi}{12} + k2\pi$;

$3x = -\frac{1}{12}\pi + k2\pi$; $x = -\frac{1}{36}\pi + \frac{2}{3}k\pi$

Equazioni del tipo

$$tg\,x = m$$

ammette soluzioni $\forall$ valore di m con $m \in \left]-\infty ; +\infty\right[$



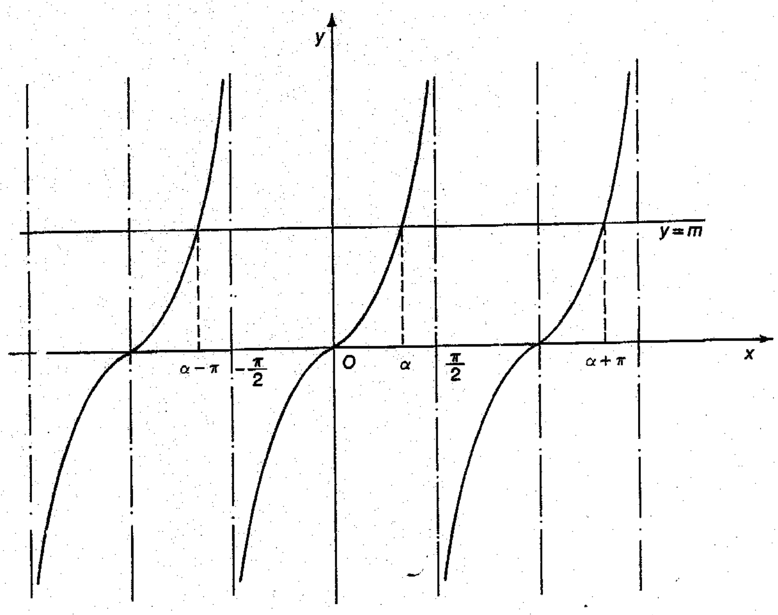
se α è soluzione anche $\pi + \alpha$ è soluzione

Inoltre ricordiamo che la tangente ha periodo $K\pi$. Da cui

$X_1 = \alpha + 2K\pi$ e $X_2 = \pi + \alpha + 2K\pi$

X_2 la si può anche descrivere mediante x_1, $X_2 = \alpha + K\pi$

usando come periodo della soluzione π e non 2π



Esempio $tg\, x = -\sqrt{3}$

Dalla tabella dei valori della tangente si ha che

$$tg\, \frac{2}{3}\pi = -\sqrt{3} \quad \Rightarrow$$

1) $tg\, x = tg\, \frac{2}{3}\pi \;;\; x = \frac{2}{3}\pi + 2K\pi$

2) $x = \frac{2}{3}\pi + \pi + 2K\pi \;;\; x = \frac{2\pi + 3\pi}{3} + 2K\pi \;;\; x = \frac{5}{3}\pi + 2K\pi$

la 2) è ricavabile dalla 1) $x_2 = \frac{2}{3} + K\pi$ prendendo il periodo π e non 2π

Equazioni del tipo:

$$\boxed{tg\, hx = m}$$

se α è soluzione, cioè se $tg\,\alpha = m$, si ha

$$tg\, hx = tg\,\alpha$$

$$hx = \alpha + K\pi \; ; \; X = \frac{\alpha}{h} + \frac{K}{h}\pi$$

Equazioni del tipo

~~tg~~ $tg\, hx = tg\, \ell x$ con $(h, \ell \in R)$

$$hx = \ell x + K\pi \; ; \; hx - \ell x = K\pi \; ; \; x(h-\ell) = K\pi \; ;$$

$$x = \frac{K}{h-\ell} \cdot \pi$$

Esempio

$$tg\, 4x = -1$$

Dalla tabella dei valori della tangente si ha

$$tg\, \frac{3}{4}\pi = -1$$

segue che

$$4x = \frac{3}{4}\pi + K\pi ; \quad x = \frac{3}{16}\pi + K\frac{\pi}{4}$$

Esempio

$$tg\, x = tg\, \frac{x}{2}$$

$$x = \frac{x}{2} + K\pi ; \quad x - \frac{x}{2} = K\pi ; \quad x\left(1 - \frac{1}{2}\right) = K\pi ;$$

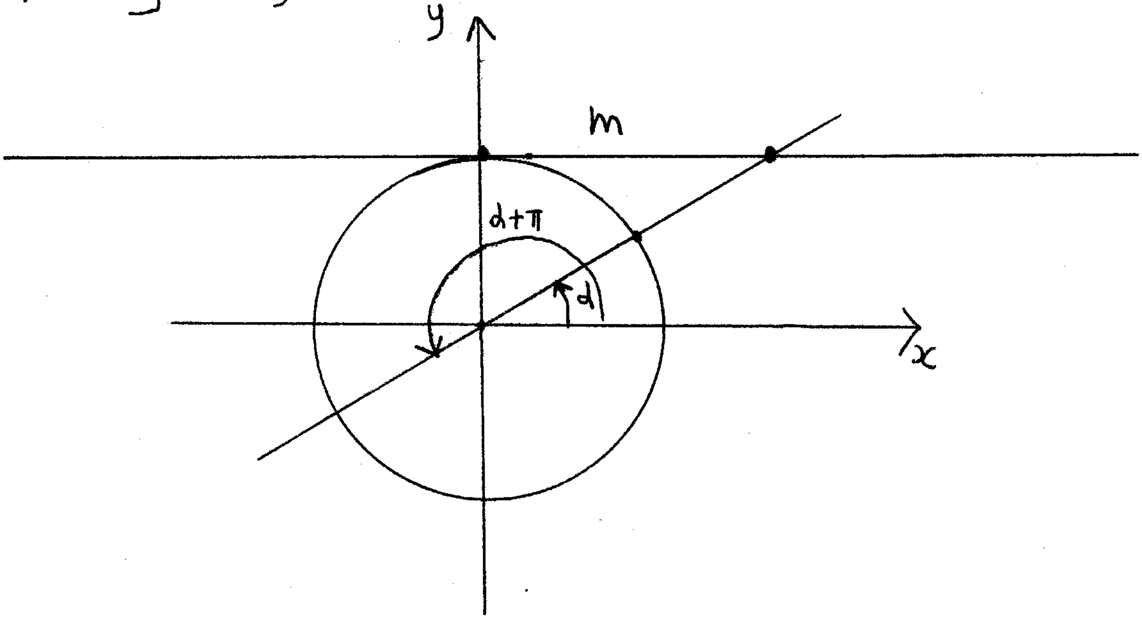
$$x\left(\frac{2-1}{2}\right) = K\pi ; \quad x \cdot \frac{1}{2} = K\pi ; \quad x = 2K\pi .$$

Equazioni del tipo

$$ctg\, x = m$$

ha soluzione qualunque sia il valore di m

$m \in]-\infty ; \infty[$



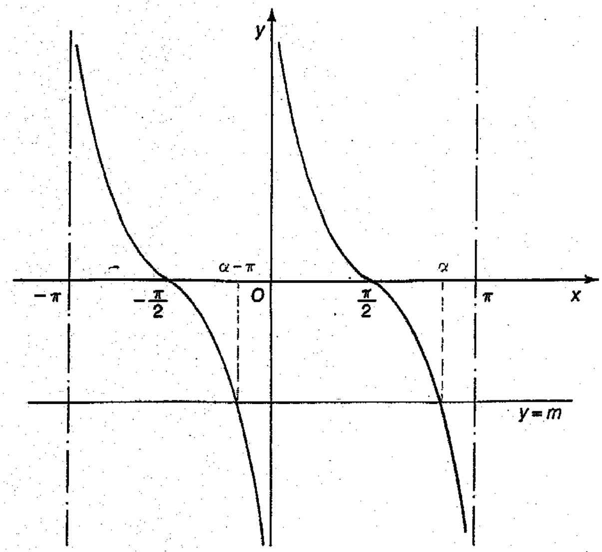
se α è soluzione anche $\pi + \alpha$ è soluzione.

$x_1 = \alpha + 2k\pi$ e $x_2 = \pi + \alpha + 2k\pi$

le 2 soluzioni si possono sintetizzare con l'unica soluzione

$x = \alpha + k\pi$ inserendo

il periodo della cotangente che è $k\pi$



Esempio $\quad ctg\, x = +1$

dalla tabella dei valori della cotangente si ha che

$ctg \frac{\pi}{4} = 1$ segue che

$ctg\, x = ctg \frac{\pi}{4}$; $\quad x = \frac{\pi}{4} + K\pi$

Esempio

$$\operatorname{ctg} \frac{5}{2} x = 0$$

dai valori di ctg : $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow$

$$\operatorname{ctg} \frac{5}{2} x = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \frac{5}{2} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ;$$

$$x = \frac{\cancel{2}}{5} \cdot \frac{\pi}{\cancel{2}} + \frac{2}{5} k\pi \quad ; \quad x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5} k\pi$$

Esempio

$$\operatorname{ctg} \frac{x}{3} = \operatorname{ctg} \frac{x}{4}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{x}{4} + k\pi \quad ; \quad \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = k\pi \quad ; \quad x\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = k\pi$$

$$x\left(\frac{4-3}{12}\right) = k\pi \quad ; \quad x\left(\frac{1}{12}\right) = k\pi \quad ; \quad x = 12 k\pi$$

Le funzioni inverse delle funzioni goniometriche

Quando un valore di funzione goniometrica non è presente nelle tabelle dei valori noti si deve ricorrere alle funzioni inverse.

arc sen

arc cos α

arc tg

arc ctg

il valore si determina utilizzando la calcolatrice.

Equazioni Riconducibili a Elementari

Esempio

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2 = 0$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1-3}{2} = -2 \\ \frac{-1+3}{2} = 1 \end{cases}$$

La soluzione $\operatorname{sen} x = -2$ è da scartare

$\operatorname{sen} x = 1 \quad \Rightarrow$

$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$; $\quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Esempio

$$\sqrt{2} \operatorname{sen} x \cos x + \cos x = 0$$

$$\cos x \left(\sqrt{2} \operatorname{sen} x + 1\right) = 0$$

1° fattore

$\cos x = 0$; $\quad \cos x = \cos \frac{\pi}{2}$; 1) $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$

2) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

2° fattore

$$\sqrt{2}\ \text{sen}\,x + 1 = 0; \quad \sqrt{2}\ \text{sen}\,x = -1;$$

$$\text{sen}\,x = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \text{sen}\,x = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

dalle tabelle del seno si ha che

1) $\text{sen}\,\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$$\text{sen}\,x = \text{sen}\,\frac{5}{4}\pi; \quad x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$$

2) se $\frac{5}{4}\pi$ è soluzione, anche $\pi - \frac{5}{4}\pi$ è soluzione

$$\text{sen}\,x = \text{sen}\left(\pi - \frac{5}{4}\pi\right);$$

$$\text{sen}\,x = \text{sen}\left(\frac{4\pi - 5\pi}{4}\right);$$

$$\text{sen}\,x = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\pi\right);$$

$x = -\frac{\pi}{4}\pi + 2k\pi$ se non vogliamo desciverlo mediante un angolo negativo, basta calcolare il complementare a 2π

$$-\frac{\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi - \pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$$

Da cui la 2ª famiglia delle soluzioni è

$$\boxed{x = \frac{7}{4} + 2k\pi}$$

la 1ª famiglia era rappresentata da

$$\boxed{x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi}$$

Esempio

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

poniamo $\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{5} = t$

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

dalla tabella del valore del seno si ha che:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ da cui

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \;; \quad t = \frac{\pi}{3} + 2\pi K$$ cioè

$$\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{3} + 2\pi K \;;$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3} + 2K\pi \;; \quad \frac{2}{3}x = \frac{3\pi + 5\pi}{15} + 2K\pi \;;$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{8\pi}{15} + 2K\pi \;; \quad x = \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}_{1}} \cdot \frac{\cancel{8}^{4}\pi}{\cancel{15}_{5}} + \frac{3}{\cancel{2}} \cancel{2}K\pi$$

$$\boxed{x = \frac{4}{5}\pi + 3K\pi}$$

~~Circa~~ Circa le equazioni che contengono il seno sappiamo che se α è soluzione anche $\pi - \alpha$ è soluzione.

Quindi anche $\pi - \frac{\pi}{3}$ è soluzione

$$t = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi K \quad \text{cioè}$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi K$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{\pi}{5} + \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi K;$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{3\pi + 15\pi - 5\pi}{15} + 2\pi K;$$

$$\frac{2}{3}x = \frac{13\pi}{15} + 2\pi K;$$

$$x = \frac{\cancel{3}}{2}\,\frac{13}{\cancel{15}_{5}}\pi + \frac{3}{\cancel{2}}\cancel{2}\pi K;$$

$$x = \frac{13}{10}\pi + 3\pi K$$

Equazioni Lineari in sen x e cos x

$$a \,\mathrm{sen}\, x + b \cos x + c = 0 \qquad (1)$$

se a e/o b sono uguale a 0, si ricade nelle equazioni elementari, altrimenti si inseriscono le seguenti sostituzioni

$$\mathrm{sen}\, x = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} \quad e \quad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad (2)$$

Le (2) valgono $\forall x$ ma con $x \neq \pi + 2k\pi$

OSSERVAZIONE: le funzioni sen x e cos x sono funzioni ovunque definite mentre la tangente nelle formule (2) per $x = \pi + k2\pi$ non è definita in quanto la tg non esiste per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $\alpha = \frac{3}{2}$.

Di conseguenza si deve provare nella (1) se $x = \pi + k2\pi$ è soluzione.

Se lo è, tale soluzione la si deve aggiungere a quelle trovate sostituendo la (2) in (1). (28)

Quindi si deve verificare che

$$a \operatorname{sen}(\pi + 2k\pi) + b \cos(\pi + 2k\pi) + c = 0$$

Sostituendo la (2) in (1) si ha

$$a \cdot \frac{2 \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + b\,\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + c = 0$$

$$\frac{a \cdot 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) + c\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{0}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$2a\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b - b\cdot\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + c + c\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = 0$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}(c-b) + 2a\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2} + (b+c) = 0$$

a questo punto si risolve l'equazione come una equazione di 2 grado.

Esempio

$$\operatorname{sen} x - \cos x - 1 = 0 \qquad (1)$$

Verifichiamo se $x = \pi + k2\pi$ è o non è soluzione

$$\operatorname{sen}(x + k2\pi) - \cos(\pi + k2\pi) - 1 = 0$$

$$0 - (-1) - 1 = 0; \quad 1 - 1 = 0; \quad 0 = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\boxed{x = \pi + k2\pi \text{ è soluzione}}$$

Adesso sostituiamo

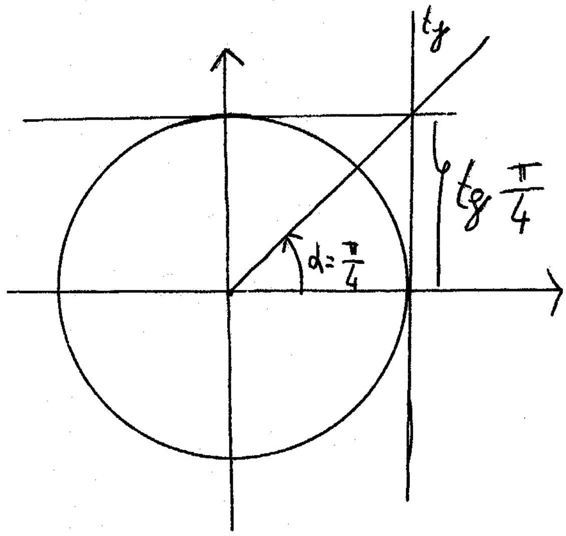
$$\operatorname{sen} x = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} \quad e \quad \cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$$

$$\frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} - \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} - 1 = 0$$

$$\frac{2\,tg\frac{x}{2} - \left(1 - tg^2\frac{x}{2}\right) - \left(1 + tg^2\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{0}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$$

$$2tg\frac{x}{2} - 1 + \cancel{tg^2\frac{x}{2}} - 1 - \cancel{tg^2\frac{x}{2}} = 0$$

$$2tg\frac{x}{2} - 2 = 0 \; ; \; tg\frac{x}{2} - 1 = 0 \; ; \; tg\frac{x}{2} = 1$$



dalle tabelle della tangente si ha che

$tg\frac{\pi}{4} = 1$ segue che

$$tg\frac{x}{2} = tg\left(\frac{\pi}{4} + K\pi\right) \; ; \; \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + K\pi \; ;$$

$$x = \cancel{2}\,\frac{\pi}{\cancel{4}_{2}} + 2K\pi \; ; \; \boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi}$$

In definitiva le soluzioni sono

$x = \pi + K\pi$ e $x = \frac{\pi}{2} + K2\pi$.

Esercizio

$$\mathrm{sen}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\,\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}=0 \quad (1)$$

poniamo $2x-\frac{\pi}{3}=t$

$$\mathrm{sen}(t)+\sqrt{3}\,\cos(t)-\sqrt{3}=0$$

Verifichiamo se $x=\pi+k2\pi$ è soluzione:

$$\mathrm{sen}(\pi+k2\pi)+\sqrt{3}\,\cos(\pi+k2\pi)-\sqrt{3}=0$$

$0+\sqrt{3}(-1)-\sqrt{3}=0$; $\sqrt{3}-\sqrt{3}\neq 0$! quindi

$x=\pi+2k\pi$ Non sono soluzioni.

applichiamo alla (1) le parametriche

$$\frac{2\,tg\frac{t}{2}}{1+tg^2\frac{t}{2}}+\sqrt{3}\cdot\frac{1-tg^2\frac{t}{2}}{1+tg^2\frac{t}{2}}-\sqrt{3}=0$$

$\Rightarrow$

$$2\,tg\frac{t}{2}+\sqrt{3}\left(1-tg^2\frac{t}{2}\right)-\sqrt{3}\left(1+tg^2\frac{t}{2}\right)=0$$

32

$$2 tg\frac{t}{2} + \cancel{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\, tg^2\frac{t}{2} - \cancel{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\, tg^2\frac{t}{2} = 0$$

$$tg^2\frac{t}{2}\left(-\sqrt{3} - \sqrt{3}\right) + tg\frac{t}{2}\left(2\right) + \cancel{\xi} = 0$$

$$-\cancel{2}\sqrt{3}\; tg^2\frac{t}{2} + \cancel{2} tg\frac{t}{2} = 0;$$

$$\sqrt{3}\, tg^2\frac{t}{2} - tg\frac{t}{2} = 0;$$

$$tg\frac{t}{2}\left(\sqrt{3}\, tg\frac{t}{2} - 1\right) = 0$$

1ª $\quad tg\frac{t}{2} = 0$; sapendo che $tg\, 0 = 0$;

$$tg\frac{t}{2} = tg(0 + K\pi);\; \frac{t}{2} = K\pi;\; \boxed{t = 2K\pi}$$

2ª $\quad \sqrt{3}\, tg\frac{t}{2} - 1 = 0;\; tg\frac{t}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

$tg\frac{t}{2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$; $tg\frac{t}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

sapendo che $tg\frac{t}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $tg\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ si ha:

$tg\frac{t}{2}=tg\left(\frac{\pi}{6}+K\pi\right)$; $\frac{t}{2}=\frac{\pi}{6}+K\pi$;

$t=\cancel{2}\cdot\frac{\pi}{\cancel{6}_{3}}+2K\pi$; $t=\frac{\pi}{3}+2K\pi$

In definitiva abbiamo trovato che le 2 famiglie di soluzioni sono:

1) $t=2K\pi$

2) $t=\frac{\pi}{3}+2K\pi$

con $t=2x-\frac{\pi}{3}$

Dalla 1) si ha:

$2x-\frac{\pi}{3}=2K\pi$; $2x=\frac{\pi}{3}+2K\pi$; $\boxed{x=\frac{\pi}{6}+K\pi}$ (3)

Dalla 2) si ha

$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2K\pi$; $2x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+2K\pi$;

$2x=2\cdot\frac{\pi}{3}+2K\pi$; $\boxed{x=\frac{\pi}{3}+K\pi}$ (4)

La (3) e la (4) rappresentano le famiglie delle soluzioni.

L'esercizio, come risulta evidente, si potrebbe risolvere sviluppando le traccia con le formule di sottrazione e duplicazione, ma solitamente tale procedura è molto più laboriosa. In genere, anche se non sempre, utilizzare la tecnica della sostituzione è ottimale sia per lunghezza sia per complessità della procedura.

Risoluzione grafica delle equazioni lineari

Supponiamo di avere l'equazione lineare

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x + c = 0 \qquad (1)$$

In precedenza, avevamo sottolineato, che, il coseno lo stimiamo sempre sull'asse delle X e il seno sull'asse delle Y.

Per cui, poniamo:

$$\cos x = X \qquad e \qquad \operatorname{sen} x = Y$$

Sotto tali condizioni la (1) equivale al sistema

$$(2) \begin{cases} aY + bX + c = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

L'equazione $X^2 + Y^2 = 1$ è la relazione fondamentale della goniometria

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1.$$

Esempio

Risolvere: $\cos x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \quad (1)$

Poniamo $\cos x = X$ e $\operatorname{sen} x = Y$

$$\begin{cases} X + Y - 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = 1 - Y \\ (1-Y)^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 1 - Y \\ \cancel{1} + Y^2 - 2Y + Y^2 - \cancel{1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 1 - Y \\ 2Y^2 - 2Y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = 1 - Y \\ Y^2 - Y = 0 \end{cases}$$

$Y(Y-1) = 0 \qquad \boxed{Y = 0}$ 1^a sol.

$Y - 1 = 0 \;;\; \boxed{Y = 1}$ 2^a soluzione

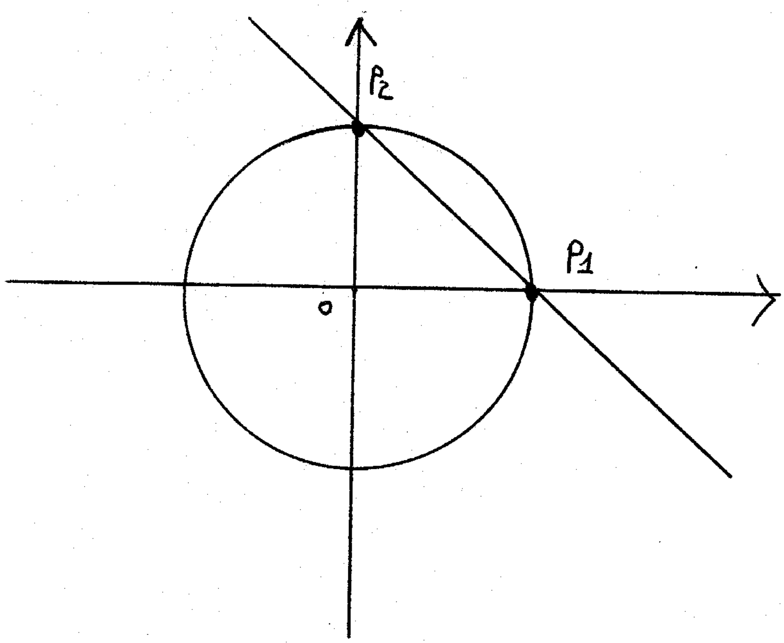
Da $Y = 0$ si ha: $\quad X = 1 - Y \;;\; X = 1 - 0 \;;\; \boxed{X = 1}$ Da cui

$P_1(1;0)$

Da $Y=1$ si ha

$X=1-Y$; $X=1-1$; $\boxed{X=0}$ Da cui

$P_2(0;1)$



Determiniamo gli angoli rispetto ai quali si osservano le soluzioni

1) $x_1 = 0 + K2\pi$

2) $x_2 = \frac{\pi}{2} + K2\pi$

Cioè

$x_1 = K2\pi$ e $x_2 = \frac{\pi}{2} + K2\pi$

E tali sono le soluzioni di (1).

Esercizio

$$(\sqrt{3}+2)\cos x + \operatorname{sen} x + 1 = 0 \qquad (1)$$

Poniamo

$$\cos x = X \qquad e \ \operatorname{sen} x = Y$$

Studiare la (1) equivale a studiare il sistema

$$\begin{cases} (\sqrt{3}+2) \cdot X + Y + 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

Ricaviamo Y dall'equazione lineare:

$$y = -1 - (\sqrt{3}+2)X \ ; \quad y = -1 - \sqrt{3}X - 2X$$

per cui

$$X^2 + (-1 - \sqrt{3}\,X - 2X)^2 = 1 \ ;$$

$$x^2 + \cancel{1} + 3x^2 + 4x^2 + 2\sqrt{3}\,x + 4x + 4\sqrt{3}\,x^2 - \cancel{1} = 0$$

$$x^2\left(1 + 3 + 4 + 4\sqrt{3}\right) + x\left(2\sqrt{3} + 4\right) = 0$$

$$x^2\left(8 + 4\sqrt{3}\right) + x\left(2\sqrt{3} + 4\right) = 0$$

$$x\left[\left(8 + 4\sqrt{3}\right)x + \left(4 + 2\sqrt{3}\right)\right] = 0$$

1^a Soluzione $\quad x = 0$

2^e Soluzione

$$\left(8 + 4\sqrt{3}\right)x + \left(4 + 2\sqrt{3}\right) = 0\,;$$

Dividiamo i coefficienti per 2

$$\left(4 + 2\sqrt{3}\right)x + \left(2 + \sqrt{3}\right) = 0\,; \quad \left(4 + 2\sqrt{3}\right)x = -\left(2 + \sqrt{3}\right)\,;$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Sostituiamo $x = 0$ nell'equazione lineare

$$\left(\sqrt{3} + 2\right)\cdot 0 + y + 1 = 0\,; \quad y + 1 = 0\,; \quad y = -1$$

$$P_1(0\,; -1)$$

Sostituiamo

$x = -\frac{1}{2}$ nell'equazione lineare

$$(\sqrt{3}+2)\left(-\frac{1}{2}\right)+y+1=0;$$

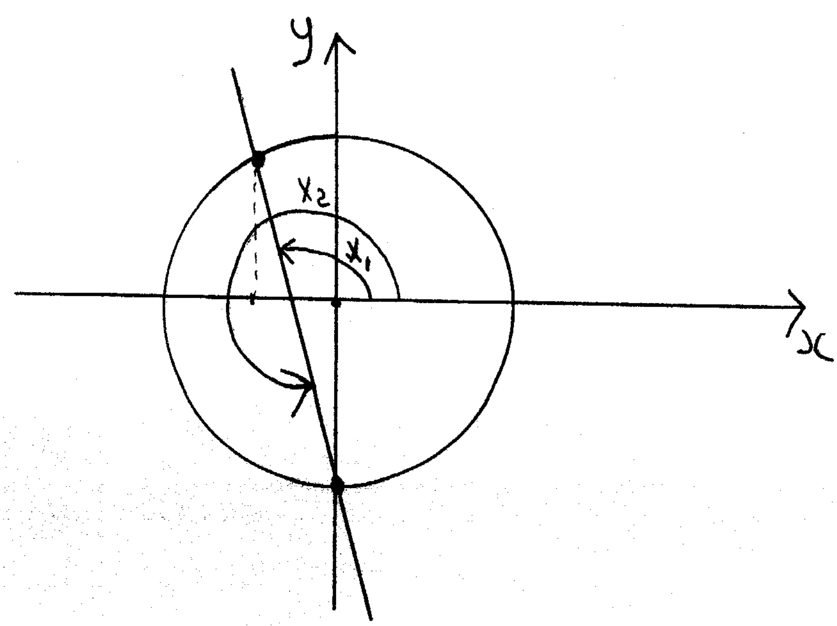
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}+y+1=0; \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}-\cancel{1}+\cancel{1}+y=0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}+y=0; \quad y=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P_2\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

In definitiva i punti di intersezione sono

$P_1(0; -1)$ e $P_2\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



Per determinare il valore di X_1 si deve cercare il valore di un angolo nel secondo quadrante che ha valore di coseno $-\frac{1}{2}$ e/o valore del seno $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Dalle tabelle si ha che

$$X_1 = \frac{2}{3}\pi + K2\pi$$

e

$$X_2 = \frac{3}{2}\pi + K2\pi$$

se nelle tabelle non ci sono i valori cercati li troviamo con la calcolatrice con le funzioni arccos e arcsen.

X_1 e X_2 sono le 2 famiglie di soluzioni cercate.

Interpretazione Grafica delle Soluzioni delle equazioni lineari.

Data $a \operatorname{sen} x + b \cos x + c = 0$ (1)

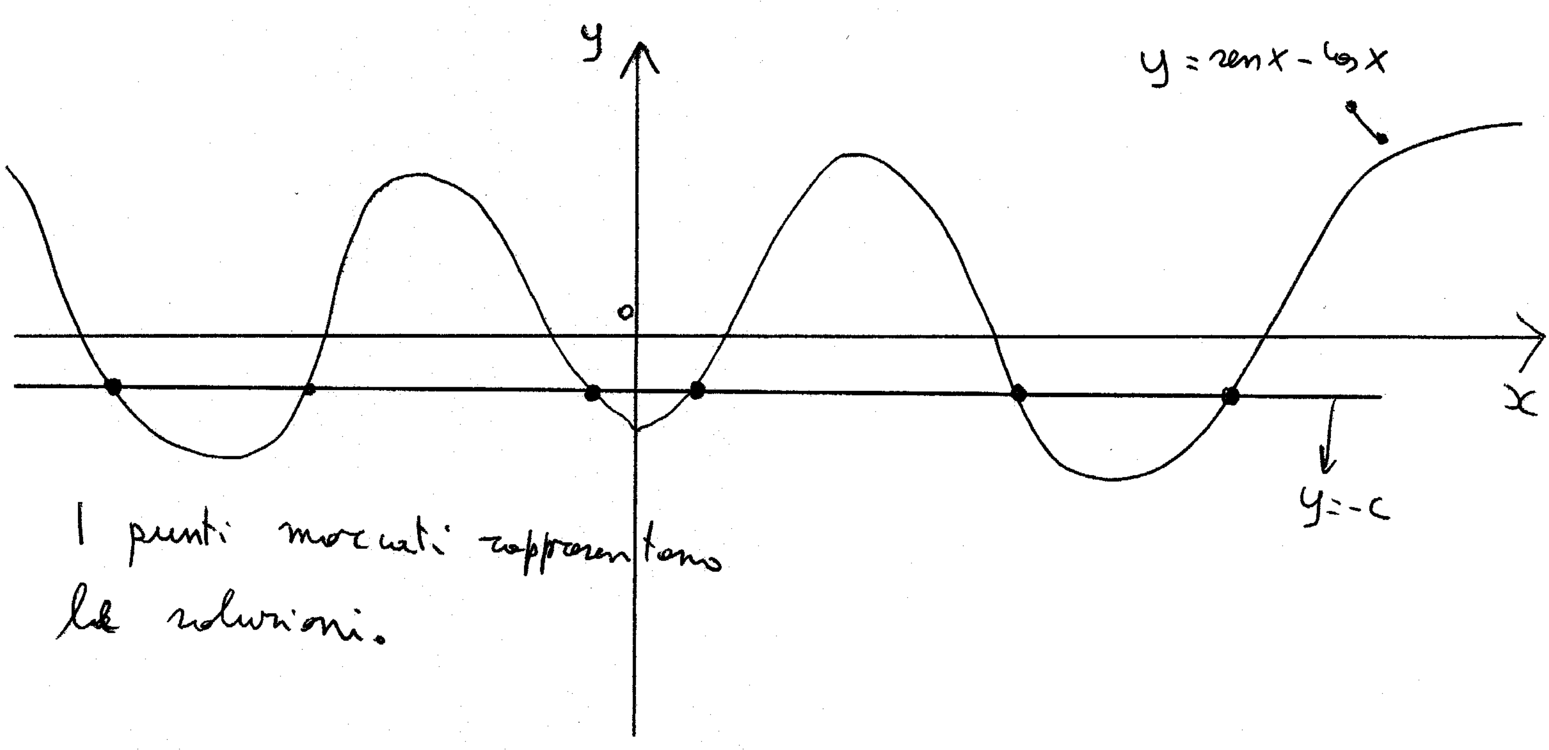
$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = -c \quad (2)$$

La scriviamo nella forma di 2 funzioni

$$(3) \begin{cases} y = a \operatorname{sen} x + b \cos x \\ y = -c \end{cases}$$

Le soluzioni di (1) sono le intersezioni di (3)

Si deve tracciare nello stesso grafico, anche per interpolazione di punti le 2 curve



I punti marcati rappresentano le soluzioni.

Equazioni Omogenee in $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$

Un'equazione è omogenea in $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ se tutti i suoi termini hanno lo stesso grado.

Esempi:

1) $a \operatorname{sen} x + b \cos x = 0$

2) $a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x = 0$

3) $a \operatorname{sen}^3 x + b \operatorname{sen}^2 x \cos x + c \operatorname{sen} x \cos^2 x + d \cos^3 x = 0$

ecc.

Consigli per risolvere una equazione omogenea:

1) Se nell'equazione c'è il termine di grado massimo $\operatorname{sen}^n x$ si divide tutta l'equazione per $\cos^n x$ (in questo caso $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ non sono soluzioni) e si ottiene una equazione in $\operatorname{tg} x$.

2) Se nell'equazione il grado massimo è rappresentato da $\cos^n x$ si divide tutta l'equazione per $\operatorname{sen}^n x$ (in questo caso $x = k\pi$ non sono soluzioni) e si ottiene una equazione in $\operatorname{ctg} x$.

3) Se nell'equazione il grado massimo non è rappresentato né da $\cos^n x$ né da $\operatorname{sen} x$ si cercherà di effettuare opportuni raccoglimenti.

Esempio

$$\operatorname{sen}^2 x + (1-\sqrt{3}) \operatorname{sen} x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0 \quad (1)$$

Nell'equazione c'è sia $\operatorname{sen}^2 x$ sia $\cos^2 x$ => che non sono ammesse le soluzioni del tipo:

1) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

2) $x = k\pi$

dividiamo la (1) per $\cos^2 x$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + (1-\sqrt{3}) \frac{\operatorname{sen} x \cancel{\cos x}}{\cos^2 x} - \sqrt{3} \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}} = 0$$

$$tg^2 x + (1-\sqrt{3})\, tg\, x - \sqrt{3} = 0 \quad (3)$$

$$tg\,x = \frac{-(1-\sqrt{3}) \pm \sqrt{(1-\sqrt{3})^2 - 4(1)(-\sqrt{3})}}{2} =$$

$$= \frac{-1+\sqrt{3} \pm \sqrt{1+3-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}}}{2} =$$

$$= \frac{-1+\sqrt{3} \pm \sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2} \qquad (4)$$

Lavoriamo con il radicale doppio

$$(5) \quad \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

$$\sqrt{4+\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{16-12}}{2}} \pm \sqrt{\frac{4-\sqrt{16-12}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4+2}{2}} \pm \sqrt{\frac{4-2}{2}} = \sqrt{3} + 1$$

torniamo alla (4)

$$= \frac{-1+\sqrt{3} \pm (\sqrt{3}+1)}{2} = \begin{cases} \dfrac{\cancel{-1}+\sqrt{3}+\sqrt{3}+\cancel{1}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\[2ex] \dfrac{-1\cancel{+\sqrt{3}}\cancel{-\sqrt{3}}-1}{2} = -\dfrac{2}{2} = -1 \end{cases}$$

da cui

1^a $\boxed{tg\,x = -1}$ e $\boxed{tg\,x = \sqrt{3}}$ 2^a

1^a $tg\,x = -1$; $tg\,x = tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $\boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi}$ 1^a

2^a $tg\,x = \sqrt{3}$; $tg\,x = tg\,\frac{\pi}{3}$; $\boxed{x = \frac{\pi}{3} + k\pi}$ 2^a

$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ e $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ sono le

2 famiglie di soluzioni cercate.

Esercizio

$$\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x = 0 \qquad (1)$$

Nell'equazione (1) c'è il termine $\cos^2 x \Rightarrow$

$x = k\pi$ non è soluzione.

Dividiamo per $\operatorname{sen}^2 x$

$$\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{\cancel{\operatorname{sen} x} \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = 0$$

$$\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{cotg} x = 0$$

$\operatorname{cotg} x(\operatorname{cotg} x + 1) = 0$; $\operatorname{cotg} x = 0$ e $\operatorname{cotg} x = -1$

da $\operatorname{cotg} x = 0$ si ha

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi} \qquad (2)$$

mentre da $\operatorname{cotg} x = -1$; $\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

$$\boxed{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi} \qquad (3)$$

(2) e (3) sono ~~le~~ famiglie di soluzioni cercate.

Esercizio

$$\operatorname{sen} x \cos^2 x - \sqrt{3}\, \operatorname{sen}^2 \cos x = 0 \qquad (1)$$

Mettiamo $\operatorname{sen} x \cos x$ in evidenza

$$\operatorname{sen} x \cos x \left(\cos x - \sqrt{3}\, \operatorname{sen} x \right) = 0$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \lor b = 0$$

1° Fattore $= 0$

$$\operatorname{sen} x \cos x = 0 \implies \begin{array}{l} 1)\ \cos x = 0 \\ 2)\ \operatorname{sen} x = 0 \end{array}$$

2° Fattore $= 0$

$$\cos x - \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} x = 0 \qquad 3)$$

Risolviamo la 1) $\cos x = 0$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi} \qquad (4)$$

Risolviamo la 2) $\operatorname{sen} x = 0$

$$\boxed{x = k\pi} \qquad (5)$$

Risolviamo la (3)

$$\cos x - \sqrt{3}\ \operatorname{sen} x = 0$$

dividiamo per $\cos x$

$$\frac{\cancel{\cos x}^{1}}{\cancel{\cos x}} - \sqrt{3}\ \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0$$

$$1 - \sqrt{3}\ tg\,x = 0;\quad 1 = \sqrt{3}\ tg\,x;\quad tg\,x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$tg\,x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\ \sqrt{3}}\quad;\quad tg\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dalla tabella dei valori della tangente si ha:

$$tg\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}\ \text{se}\ \boxed{x = \frac{\pi}{6} + k\pi} \quad (6)$$

Le famiglie (4), (5) e (6) sono le soluzioni di (1).

L'equazione (1) la si potrebbe risolvere in altro modo

$$(1)\quad \operatorname{sen} x \cos^2 x - \sqrt{3}\ \operatorname{sen}^2 x \cos x = 0$$

è di 3° grado, dividiamo tutto per $\cos^3 x$
ricordando che se dividiamo per $\cos^3 x$ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\frac{\operatorname{sen} x\ \cancel{\cos^2 x}}{\cos^{\cancel{3}} x} - \frac{\sqrt{3}\ \operatorname{sen}^2 x\ \cancel{\cos x}}{\cos^{\cancel{3}\,2} x} = 0$$

$$\operatorname{tg} x - \sqrt{3}\,\operatorname{tg}^2 x = 0;$$

$$\sqrt{3}\,\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0;$$

$$\operatorname{tg} x\left(\sqrt{3}\,\operatorname{tg} x - 1\right) = 0$$

1) $\operatorname{tg} x = 0$
2) $\sqrt{3}\,\operatorname{tg} x - 1 = 0$

Risolviamo la 1) $\operatorname{tg} x = 0$

$$x = k\pi$$

Risolviamo la 2) $\sqrt{3}\,\operatorname{tg} x = 1; \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}};$

$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

Con tale procedura non si stimano le eventuali soluzioni $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
e quindi se si utilizza tale tecnica si deve verificare se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ sono o no soluzioni.
Tale procedura è semplice in quanto basta sostituire $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ nella traccia.

Equazioni Riconducibili a Omogenee

Equazioni del tipo

$$a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x + d = 0 \quad (1)$$

non è omogenea, ma facilmente può essere trasformata in omogenea moltiplicando per la relazione fondamentale

$1 = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$ il termine d.

Esempio

$$(3+\sqrt{3}) \operatorname{sen}^2 x + 2 \cos^2 x + (\sqrt{3} - 1) \operatorname{sen} x \cos x - 3 = 0 \quad (2)$$

Per renderla omogenea basta moltiplicare il -3 per la relazione fondamentale.

$$(3+\sqrt{3}) \operatorname{sen}^2 x + 2 \cos^2 x + (\sqrt{3} - 1) \operatorname{sen} x \cos x - 3(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) = 0 \quad (3)$$

$$\underline{(3+\sqrt{3}) \operatorname{sen}^2 x} + \underline{2 \cos^2 x} + (\sqrt{3} - 1) \operatorname{sen} x \cos x \underline{- 3 \cos^2 x} \underline{- 3 \operatorname{sen}^2 x} = 0$$

$$[3+\sqrt{3} - 3] \operatorname{sen}^2 x + [2 - 3] \cos^2 x + (\sqrt{3} - 1) \operatorname{sen} x \cos x = 0$$

$$\sqrt{3} \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x + (\sqrt{3} - 1) \operatorname{sen} x \cos x = 0$$

Dividiamo per $\cos^2 x$

$$\frac{\sqrt{3}\ \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + (\sqrt{3}-1)\frac{\operatorname{sen} x\ \cancel{\cos x}}{\cancel{\cos^2 x}} - \frac{\cancel{\cos^2 x}^{\,1}}{\cancel{\cos^2 x}} = 0$$

$$\sqrt{3}\ tg^2 x + (\sqrt{3}-1)\,tg\, x - 1 = 0 \qquad (4)$$

Avendo diviso, per tecnica di calcolo, per $\cos^2 x$, mai si potrebbe stimare se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ è o no soluzione. Per capire ciò, successivamente, si sostituirà nella traccia o nei passaggi successivi, ma prima della divisione per $\cos^2 x$.

$$tg\, x = \frac{-(\sqrt{3}-1) \pm \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2 - 4(\sqrt{3})(-1)}}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{-(\sqrt{3}-1) \pm \sqrt{3+1-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1-\sqrt{3} \pm \sqrt{3+1+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1-\sqrt{3} \pm \sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3} \pm \sqrt{4+\sqrt{12}}}{2\sqrt{3}} = \quad (5)$$

Studiamo il radicale doppio $\sqrt{4+\sqrt{12}}$

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

$$\sqrt{4+\sqrt{12}} = \cancel{\sqrt{16}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{16-12}}{2}} + \sqrt{\frac{4-\sqrt{16-12}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4+2}{2}} + \sqrt{\frac{4-2}{2}} = \sqrt{3} + 1$$

da (5)

$$= \frac{1-\sqrt{3} \pm (\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1-\cancel{\sqrt{3}}+\cancel{\sqrt{3}}+1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{\cancel{1}-\sqrt{3}-\sqrt{3}-\cancel{1}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -1 \end{cases}$$

In definitiva le soluzioni sono

1° $tg\, x = -1$ e 2° $tg\, x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

da 1° si ha

$tg\, x = tg\, \dfrac{3}{4}\pi$ da cui $\boxed{x = \dfrac{3}{4}\pi + K\pi}$

da 2° si ha

$tg\, x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ dai valori ~~dei~~ della tangente $tg\, x = tg\, \dfrac{\pi}{6}$ da cui

$\boxed{x = \dfrac{\pi}{6} + K\pi}$

Verifichiamo se $\frac{\pi}{2}$ è soluzione. In precedenza abbiamo diviso per $\cos x$ e sappiamo bene che $\cos\frac{\pi}{2}=0$, per cui le soluzioni $x=\frac{\pi}{2}$ non si possono ritrovare con questa tecnica e quindi si deve verificare puntualmente se $x=\frac{\pi}{2}$ è una ulteriore soluzione.

$$(3+\sqrt{3})\,\text{sen}^2\frac{\pi}{2}+2\cos^2\frac{\pi}{2}+(\sqrt{3}-1)\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}-3=0$$

$$(3+\sqrt{3})\cdot 1+2\cdot 0+(\sqrt{3}-1)\cdot 1\cdot 0-3=0$$

$3+\sqrt{3}-3=0$; $\sqrt{3}=0$ che è una proposizione falsa, quindi $X=\frac{\pi}{2}$ non è soluzione.

In definitiva le uniche famiglie di soluzioni sono

1) $X=\frac{3}{4}\pi+K\pi$

2) $X=\frac{\pi}{6}+K\pi$

Esercizio

$$4\,\mathrm{sen}^3 x - 8\cos^3 x - 3\,\mathrm{sen}\,x + 2\cos x = 0 \qquad (1)$$

$$4\,\mathrm{sen}^3 x - 8\cos^3 x + (-3\,\mathrm{sen}\,x + 2\cos x) = 0$$

Moltiplichiamo il termine $(-3\,\mathrm{sen}\,x + 2\cos x)$ per

$$1 = \cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x$$

$$4\,\mathrm{sen}^3 x - 8\cos^3 x + (-3\,\mathrm{sen}\,x + 2\cos x)(\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x) = 0$$

$$4\,\mathrm{sen}^3 x - 8\cos^3 x - 3\,\mathrm{sen}\,x\cos^2 x - 3\,\mathrm{sen}^3 x + 2\cos^3 x + 2\cos x\,\mathrm{sen}^2 x = 0$$

Dividiamo tutto per $\cos^3 x$, dopo aver sommato per termini simili.

$$\mathrm{sen}^3 x - 6\cos^3 x - 3\,\mathrm{sen}\,x\cos^2 x + 2\cos x\,\mathrm{sen}^2 x = 0$$

$$\frac{\mathrm{sen}^3 x}{\cos^3 x} - \frac{6\cancel{\cos^3 x}}{\cancel{\cos^3 x}} - \frac{3\,\mathrm{sen}\,x\cancel{\cos^2 x}}{\cos^3 x} + \frac{2\cancel{\cos x}\,\mathrm{sen}^2 x}{\cos^{\cancel{3}\,2} x}$$

$$tg^3 x - 6 - 3\,tg\,x + 2\,tg^2 x = 0 \qquad (2)$$

$$tg^3 x + 2\,tg^2 x - 3\,tg\,x - 6 = 0 \qquad (3)$$

poniamo $tg\,x = t$

$$t^3 + 2t^2 - 3t - 6 = 0 \qquad (4)$$

I divisori di 6 sono: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Proviamo per 2

$2^3 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 6 = 0;\ 8 + 8 - 6 - 6 = 0 \quad 4 = 0$ (falso)

Proviamo per -2

$(-2)^3 + 2(-2)^2 - 3(-2) - 6 = 0;\ -8 + 8 + 6 - 6 = 0;$

$0 = 0$ quindi $x = -2$ è soluzione

Scomponiamo la (4) con Ruffini

	1	2	-3	-6
-2		-2	0	$+6$
	1	0	-3	//

$$(t+2)(t^2 - 3) = 0$$

1° fattore $t + 2 = 0,\ t_1 = -2$

2° fattore $t^2 - 3 = 0;\ t^2 = 3;\ t = \pm\sqrt{3};$ $t_2 = \sqrt{3}$, $t_3 = -\sqrt{3}$

Riassumiamo

1) $t_1 = -2$; 2) $t_2 = \sqrt{3}$; 3) $t_3 = -\sqrt{3}$

La sostituzione è $tg\, x = t$

1) $tg\, x = -2$; $x = arctg(-2) + K\pi$

2) $tg\, x = \sqrt{3}$; $x = \frac{\pi}{3} + K\pi$

3) $tg\, x = -\sqrt{3}$; $x = -\frac{\pi}{3} + K\pi$

Verifichiamo se $x = \frac{\pi}{2}$ è soluzione

$$4\, sen^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - 8\cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - 3\, sen\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$4 \cdot 1 - 8 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0$$

$4 - 0 - 3 + 0 = 0$; $1 = 0$ (falso) quindi $x = \frac{\pi}{2}$ non è soluzione.

Soluzioni grafiche delle equazioni omogenee

Sia data

$$a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x \cos x + c \cos^2 x + d \qquad (1)$$

può essere facilmente trasformata in una espressione lineare in $\cos 2x$ e in $\operatorname{sen} 2x$. Per fare ciò si utilizzano le formule:

1.1) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

2) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

3) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$

Con tali formule la (1) diviene

$$a\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) + b\left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x\right) + c\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) + d \qquad (4)$$

Esempio

$$\sqrt{3}\,\mathrm{sen}^2 x + 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x - \sqrt{3} = 0 \quad (1)$$

Per le formule precedenti si ha:

$$\sqrt{3}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) + \cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\,\mathrm{sen}\,2x\right) - \sqrt{3}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) - \sqrt{3} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}(1-\cos 2x)}{2} + \mathrm{sen}\,2x - \frac{\sqrt{3}(1+\cos 2x)}{2} - \sqrt{3} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos 2x}{2} + \mathrm{sen}\,2x - \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}\cos 2x}{2} - \sqrt{3} = 0$$

$$\frac{\cancel{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\cos 2x + 2\,\mathrm{sen}\,2x - \cancel{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\cos 2x - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{0}{2}$$

$$\cos 2x\left(-\sqrt{3}-\sqrt{3}\right) + 2\,\mathrm{sen}\,2x - 2\sqrt{3} = 0$$

$$-2\sqrt{3}\cos 2x + 2\,\mathrm{sen}\,2x - 2\sqrt{3} = 0$$

$$\sqrt{3}\cos 2x - \mathrm{sen}\,2x + \sqrt{3} = 0 \quad (2)$$

A questo punto si studia il sistema tra la (2) e la relazione fondamentale della goniometria

$$(3)\begin{cases}\sqrt{3}\cos 2x - \operatorname{sen} 2x + \sqrt{3} = 0\\ \cos^2 2x + \operatorname{sen}^2 2x = 1\end{cases}$$

Si pone

$$\cos 2x = X \quad e \quad \operatorname{sen} 2x = Y$$

$$(4)\begin{cases}\sqrt{3}\,X - Y + \sqrt{3} = 0\\ X^2 + Y^2 = 1\end{cases}$$

$$-Y = -\sqrt{3}\,X - \sqrt{3}\;;\; Y = \sqrt{3}\,X + \sqrt{3}$$

$$X^2 + \left(\sqrt{3}\,X + \sqrt{3}\right)^2 = 1;\; X^2 + 3X^2 + 3 + 6X - 1 = 0;$$

$$4X^2 + 6X + 2 = 0;\; 2X^2 + 3X + 1 = 0$$

$$X = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(1)}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4} = \begin{cases} = -1\\ = -\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$X_1 = -1 \; ; \; X_2 = -\frac{1}{2}$$

Sostituiamo $x_1 = -1$ ~~una~~ nella 4.1

$$\sqrt{3}(-1) - Y + \sqrt{3} = 0 \; ; \; -\cancel{\sqrt{3}} - Y + \cancel{\sqrt{3}} = 0 \; ; \; Y_1 = 0$$

Sostituiamo $x_2 = -\frac{1}{2}$ nella 4.1

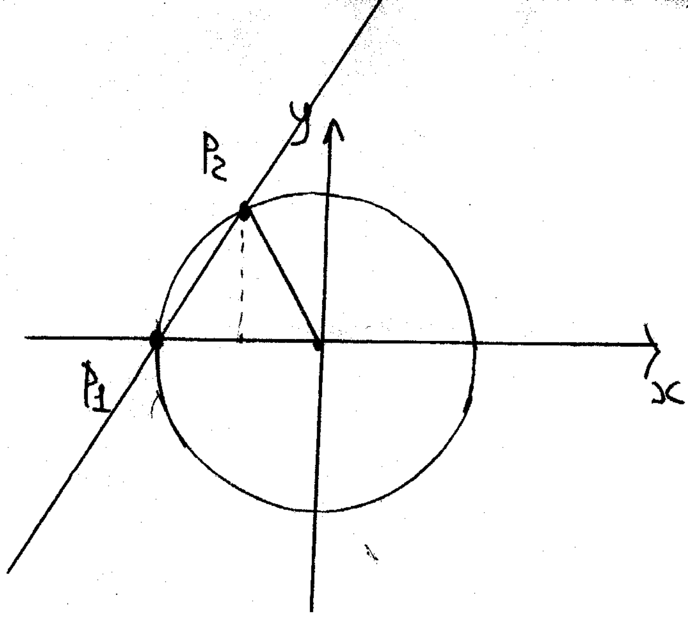
$$\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right) - Y + \sqrt{3} = 0 \; ; \; -\frac{\sqrt{3}}{2} - Y + \sqrt{3} = 0 \; ;$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + Y - \sqrt{3} = 0 \; ; \; Y = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \; ;$$

$$Y = \frac{-\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2} \; ; \; Y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Riassumiamo i risultati

$$P_1(-1 \; ; \; 0) \quad e \quad P_2\left(-\frac{1}{2} \; ; \; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (5)$$



L'angolo per il quale si ottiene P_2 è π,

segue

$$2x = \pi + k2\pi \; ; \; \boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi} \quad (6)$$

Circa P_2

$$2x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \; ; \; \boxed{x = \frac{\pi}{3} + k\pi} \quad (7)$$

Le due famiglie di soluzione sono le (6) e le (7).

Equazioni di 2° grado simmetriche

Una equazione del tipo

$$a \operatorname{sen} x \cos x + b(\operatorname{sen} x + \cos x) + c = 0 \qquad (1)$$

è detta simmetrica in quanto cambiando
sen x con cos x è rimane invariata

In tali equazioni si pone

$$x = y - \frac{\pi}{4} \qquad (2)$$

Con tale sostituzione si ha

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = \qquad (3)$$

applichiamo la formula di sottrazione del seno

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

inoltre sappiamo che $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

da (3) $= \operatorname{sen} y \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \cos y \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{sen} y - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{sen} y - \cos y\right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} y - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y} + \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} y = \operatorname{sen} x + \cos x$$

$$\boxed{2\sqrt{2}\operatorname{sen} y = \operatorname{sen} x + \cos x} \qquad (7)$$

cioè

$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{sen} y - \cos y\right) \qquad (4)$$

Calcoliamo $\cos x$

$$\cos x = \cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = \qquad (5)$$

sapendo che

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

da (5)

$$\cos y \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos y + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} y =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos y + \operatorname{sen} y\right)$$

cioè

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos y + \operatorname{sen} y\right) \qquad (6)$$

Calcoliamo (4) + (6)

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{sen} y - \cos y\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos y + \operatorname{sen} y\right) = \operatorname{sen} x + \cos x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} y - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y} + \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} y = \operatorname{sen} x + \cos x$$

$$\boxed{2\sqrt{2}\operatorname{sen} y = \operatorname{sen} x + \cos x} \qquad (7)$$

Calcoliamo

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen} y - \cos y)\right] \cdot \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen} y + \cos y)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\operatorname{sen} y - \cos y)(\operatorname{sen} y + \cos y) = \frac{2}{4}(\operatorname{sen}^2 y - \cos^2 y) =$$

$$= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}^2 y - \cos^2 y) =$$

inseriamo la relazione fondamentale

$$\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = 1 \quad ; \quad \cos^2 y = 1 - \operatorname{sen}^2 y$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}^2 y - (1 - \operatorname{sen}^2 y)\right) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}^2 y - 1 + \operatorname{sen}^2 y) = \frac{1}{2}(2\operatorname{sen}^2 y - 1)$$

In definitiva

$$\boxed{\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{2}(2\operatorname{sen}^2 y - 1)}$$

Dopo aver fatto tale lavoro preventivo inseriamo le equazioni trovate nella (1)

$$a\left[\frac{1}{2}(2\operatorname{sen}^2 y - 1)\right] + b\left(\sqrt{2}\ \operatorname{sen} y\right) + c = 0$$

$$\frac{a}{\cancel{4}} \cdot \cancel{2} \operatorname{sen}^2 y - \frac{a}{2} + b\sqrt{2} \operatorname{sen} y + c = 0$$

$$a \operatorname{sen}^2 y + b\sqrt{2} \operatorname{sen} y + \left(c - \frac{a}{2}\right) = 0$$

che è una equazione di 2° grado in $\operatorname{sen} y$.

Esercizio

$\operatorname{sen} x - \cos x = 0$

tale equazione la si può studiare sia come lineare sia come omogenea. La studiamo come lineare.

Ricordiamo che

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \; ; \; \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

e si deve verificare se $x = \pi + k2\pi$ è o non è soluzione.

Verifichiamo se $x = \pi + k2\pi$ è soluzione:

$\operatorname{sen}\pi - \cos\pi = 0$; $0-(-1)=0$; $1=0$ (falso) quindi $x = \pi + k2\pi$ NON è soluzione.

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 0$$

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 0$$

$$2\,tg\frac{x}{2} - 1 + tg^2\frac{x}{2} = 0;$$

$$tg^2\frac{x}{2} + 2tg\frac{x}{2} - 1 = 0;$$

$$tg\frac{x}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4(1)(-1)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\cancel{2}(-1 \pm \sqrt{2})}{\cancel{2}} = -1 \pm \sqrt{2} = \begin{cases} -1+\sqrt{2} & (1) \\ -1-\sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

Dalle tabelle della tangente si ha che

$$tg\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

da cui

$$tg\frac{x}{2} = tg\frac{\pi}{8}.$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{8} + K\pi; \quad X = \cancel{2}^{1} \cdot \frac{\pi}{\cancel{8}_{4}} + 2K\pi;$$

$$\boxed{X = \frac{\pi}{4} + 2K\pi}$$

Se $\frac{\pi}{8}$ è soluzione $\Rightarrow$ anche $\frac{\pi}{8} + \pi$ è soluzione

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi + K\pi; \quad X = \frac{\pi}{4} + 2\pi + 2K\pi;$$

$$X = \frac{\pi}{4} + 2K\pi$$

Esercizio

$$(1-\sqrt{2})\cos 3x - \operatorname{sen} 3x + \sqrt{2} - 1 = 0$$

(Lineare)

poniamo $3x = t$

$$(1-\sqrt{2})\cos t - \operatorname{sen} t + \sqrt{2} - 1 = 0$$

$$\operatorname{sen} t = \frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} \quad ; \quad \cos t = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}$$

$$(1-\sqrt{2})\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} - \frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} + \sqrt{2} - 1 = 0$$

$$\frac{(1-\sqrt{2})\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\right) - 2\operatorname{tg}\frac{t}{2} + (\sqrt{2}-1)\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} = \frac{0}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}$$

$$1 - \underline{\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} - \sqrt{2} + \underline{\sqrt{2}\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} - 2\operatorname{tg}\frac{t}{2} + \sqrt{2} + \underline{\sqrt{2}\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} - 1 - \underline{\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} = 0$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\left(-1+\sqrt{2}+\sqrt{2}-1\right) - 2\operatorname{tg}\frac{t}{2} + \left(\cancel{1}-\cancel{\sqrt{2}}+\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{1}\right) = 0$$

$$(2\sqrt{2}-2)\operatorname{tg}^2\frac{t}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{t}{2} = 0$$

$$2(\sqrt{2}-1)\operatorname{tg}^2\frac{t}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{t}{2} = 0;$$

$$(\sqrt{2}-1)\operatorname{tg}^2\frac{t}{2} - \operatorname{tg}\frac{t}{2} = 0$$

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2}\left[(\sqrt{2}-1)\operatorname{tg}\frac{t}{2} - 1\right] = 0$$

1° fattore $\boxed{\operatorname{tg}\frac{t}{2} = 0}$

2° fattore $(\sqrt{2}-1)\operatorname{tg}\frac{t}{2} - 1 = 0; \ (\sqrt{2}-1)\operatorname{tg}\frac{t}{2} = 1;$

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} =$$

$$= \sqrt{2}+1$$

cioè $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \sqrt{2}+1$

Dal 1° fattore si ha

$$\operatorname{tg}\frac{3x}{2} = 0; \ \operatorname{tg}\frac{3x}{2} = \operatorname{tg}0; \ \frac{3}{2}x = 0 + K\pi;$$

$$3x = 2K\pi; \ \boxed{x = \frac{2}{3}\pi K}$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}K\pi}$$

Dal 2° fattore si ha

$$tg\frac{t}{2}=\sqrt{2}+1\ ;$$

$$tg\frac{3x}{2}=\sqrt{2}+1$$

dalla tabella della tangente si ha

$$tg\frac{3}{8}\pi=\sqrt{2}+1$$

da cui

$$tg\frac{3}{2}x=tg\frac{3}{8}\pi\ ;$$

$$\frac{3}{2}x=\frac{3}{8}\pi+K\pi\ ;$$ moltiplichiamo per $\frac{2}{3}$

$$\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}x\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}=\frac{\cancel{3}}{\underset{4}{\cancel{8}}}\pi\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{3}}+K\pi\cdot\frac{2}{3}$$

$$\boxed{x=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}K\pi}$$

Equazioni biquadratiche omogenee in sen x e cos x

Sono del tipo

$$a \operatorname{sen}^4 x + b \cos^4 x + c \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + d = 0 \qquad (1)$$

si moltiplica per 1, cioè per

$$1 = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2$$

e successivamente si divide tutto per $\cos^4 x$ e si tratta come una riconducibile ad omogenea.

Esempio

$$6 \operatorname{sen}^4 x + 2 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + 4 \cos^4 x - 3 = 0 \qquad (1)$$

$$6 \operatorname{sen}^4 x + 2 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + 4 \cos^4 x - 3 (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)^2 = 0$$

$$6 \operatorname{sen}^4 x + 2 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + 4 \cos^4 x - 3 (\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x + 2 \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x) = 0$$

$$6 \operatorname{sen}^4 x + 2 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + 4 \cos^4 x - 3 \cos^4 x - 3 \operatorname{sen}^4 x - 6 \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x = 0$$

$$3 \operatorname{sen}^4 x - 4 \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x + \cos^4 x = 0$$

dividiamo per $\cos^4 x$

$$\frac{3\,\text{sen}^4 x}{\cos^4 x} - \frac{4\,\cancel{\cos^2} x\,\text{sen}^2 x}{\cos^{\cancel{4}\,2} x} + \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x} = 0$$

$$3\,\text{tg}^4 x - 4\,\text{tg}^2 x + 1 = 0 \qquad (2)$$

$$\text{tg}^2 x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4(3)(1)}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} =$$

$$= \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} \dfrac{6}{6} = 1 & (3) \\[2ex] \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} & (4) \end{cases}$$

da (3) si ottiene:

$$\text{tg}^2 x = 1 \;; \qquad \text{tg}\, x = \pm 1 \;; \qquad \boxed{\text{tg}\, x = 1} \quad (5)$$

e

$$\boxed{\text{tg}\, x = -1} \quad (6)$$

dalla (4) si ha

$$\text{tg}^2 x = \frac{1}{3} \;; \qquad \text{tg}\, x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \quad \begin{cases} \text{tg}\, x = \sqrt{\dfrac{1}{3}} \\[2ex] \text{tg}\, x = -\sqrt{\dfrac{1}{3}} \end{cases}$$

$$tg\,x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

quindi

$$\boxed{tg\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}} \quad (7)$$

$$\boxed{tg\,x = -\frac{\sqrt{3}}{3}} \quad (8)$$

dalla tabella dei valori della tangente si ha

$$tg\,\frac{\pi}{4} = 1 \quad ; \quad tg\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

dalla (5) abbiamo

$$tg\,x = tg\,\frac{\pi}{4} \; ; \quad \boxed{x = \frac{\pi}{4} + K\pi} \quad (9)$$

dalla (6) abbiamo

$$tg\,x = tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) \; ; \quad \boxed{x = -\frac{\pi}{4} + K\pi} \quad (10)$$

dalla (7)

$$tg\,x = tg\,\frac{\pi}{6} \; ; \quad \boxed{x = \frac{\pi}{6} + K\pi} \quad (11)$$

dalla (8)

$$tg\,x = tg\left(-\frac{\pi}{6}\right) ; \quad \boxed{x = -\frac{\pi}{6} + K\pi} \quad (12)$$

Le (9), (10), (11), (12) sono le famiglie delle soluzioni.

Visto che abbiamo diviso per $\cos^4 x$ non possiamo stimare se $x = \frac{\pi}{2}$ è o non è soluzione.

Verifichiamo puntualmente:

$$6 \operatorname{sen}^4 \frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{2} + 4 \cos^4 \frac{\pi}{2} - 3 = 0$$

$$6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 3 = 0$$

$6 + 0 + 0 - 3 = 0$; $\quad 3 = 0$ (falso) quindi

$X = \frac{\pi}{2} + K\pi$ non è soluzione.

Complementi

Sulle equazioni goniometriche riconducibili ad altra forma.

È bene tenere presente quando non risulta conveniente applicare le tecniche precedenti che:

1) è bene trasformare l'equazione in una equivalente che contiene soltanto una funzione goniometrica

2) è bene evitare trasformazioni che inseriscono radicali.

Esempio:

$$2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \cos x = 0 \qquad (1)$$

sappiamo che $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$; $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$;

la (1) diventa

$$2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x = 0; \quad 2 - 2\cos^2 x - 3 \cos x = 0$$

$$-2\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0 \quad ; \quad 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \qquad (2)$$

la (2) è equivalente alla (1).

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4(2)(-2)}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} =$$

$$= \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} & (3) \\[2ex] \dfrac{-8}{4} = -2 & (4) \end{cases}$$

La (4) è da scartare in quanto è < -1.

(3) $\cos x = \frac{1}{2}$

dalle tabelle dei valori del coseno, sappiamo che

$$\cos \frac{\pi}{3} = \cos x = \frac{1}{2}$$

da cui

$$\cos \frac{\pi}{3} = \cos x ; \quad \boxed{x = \frac{\pi}{3} + K2\pi}$$

Esercizio

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos x = 1 + \cos x(\cos x + 1) \qquad (1)$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cancel{\cos x} = 1 + \cos^2 x + \cancel{\cos x}$$

$$\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x - 1 = 0 \qquad (2)$$. La (2) è equivalente alla (1).

dalla relazione fondamentale si ha $1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$;

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \qquad (3)$$

(3) in (2)

$$\cancel{1} - \cos^2 x - \cos^2 x - \cancel{1} = 0; \quad -2\cos^2 x = 0; \quad 2\cos^2 x = 0$$

$\cos^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{X = \frac{\pi}{2} + 2K\pi}$ e

$$\boxed{X = \frac{3}{2}\pi + 2K\pi}$$

Esercizio

$$\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x} \qquad (1)$$

È vera se $D(x) \neq 0$.

Vediamo per quali valori di x $D(x) = 0$

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 0; \quad \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \operatorname{tg} x = 0; \quad \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} = 0;$$

deve essere $\operatorname{tg} x \neq 0$; e $\operatorname{tg} x \neq +\infty$ $\Rightarrow$

$$\boxed{x_1 \neq 0 + K\pi} \quad e \quad \boxed{x_2 \neq \frac{\pi}{2} + K\pi}$$

Inoltre deve essere $1 - \operatorname{tg}^2 x \neq 0$. Studiamo

$1 - \operatorname{tg}^2 x = 0$; $1 = \operatorname{tg}^2 x$; $\operatorname{tg} x = \pm 1$; sappiamo che

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \boxed{x_3 \neq \frac{\pi}{4} + K\pi}$$

e sappiamo che $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$; $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\boxed{x_4 \neq -\frac{\pi}{4} + K\pi}$$

La (1) esiste a meno che x sia diverso da:

$x_1 \neq K\pi$; $x_2 \neq \frac{\pi}{2} + K\pi$; $x_3 \neq \frac{\pi}{4} + K\pi$; $x_4 = -\frac{\pi}{4} + K\pi$

Torniamo alla (1) e sviluppiamo i calcoli nell'ottica di avere 1 sola funzione goniometrica.

Dalle formule di duplicazione sappiamo che

$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

dalla (1) si ha:

$$\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x} \; ; \quad 2 \operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} \; ;$$

$$2 \operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{\dfrac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x}} \; ;$$

$$2 \cancel{\operatorname{sen} x} \cancel{\cos x} = \frac{\cancel{\operatorname{sen} x} \cancel{\cos x}}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} \; ;$$

$$2 = \frac{1}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} \; ; \quad 2 \left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \right) = 1 \; ;$$

$$2 \cos^2 x - 2 \operatorname{sen}^2 x = 1 \; ;$$

$$2 \cos^2 x - 2 \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x \; ;$$

$$\underline{2 \cos^2 x} - \underline{\underline{2 \operatorname{sen}^2 x}} - \underline{\underline{\operatorname{sen}^2 x}} - \underline{\cos^2 x} = 0 \; ;$$

$$\cos^2 x - 3 \operatorname{sen}^2 x = 0$$

dividiamo tutto per $\cos^2 x$

$$\frac{\cancel{\cos^2 x}^{\,1}}{\cancel{\cos^2 x}} - \frac{3\,\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$1 - 3\,tg^2 x = 0; \quad 1 = 3\,tg^2 x;$$

$$tg^2 x = \frac{1}{3}; \quad tg\, x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$tg\, x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad tg\, x = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}};$$

$$tg\, x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

1° $\quad tg\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2° $\quad tg\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Sappiamo che $tg\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$$\boxed{x_5 = \frac{\pi}{6} + K\pi}$$

Inoltre sappiamo che $tg\,\frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\boxed{x_6 = \frac{5}{6}\pi + k\pi}$$

Le verifiche per $x = \frac{\pi}{2}$ non le facciamo in quanto in precedenza avevamo trovato che per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ l'equazione non esiste.

In definitiva le famiglie delle soluzioni sono

$$x_5 = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad e$$

$$x_6 = \frac{5}{6}\pi + k\pi$$

Esempio

$$\cos 2x + 3 \operatorname{sen} x - 2 = 0 \qquad (1)$$

dalle formule di duplicazione si ha:

$$\cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$$

per cui la (1) diviene

$$1 - 2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 2 = 0 \; ; \quad -2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \; ;$$

$$2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(1)}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

1) $\operatorname{sen} x = 1$

2) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

da 1) si ha $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$;

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

da 2) si ha $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$; ~~sen x = π/6~~ $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi}$$

Esempio

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 \frac{x}{2} \qquad (1)$$

sappiamo che

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$$

dalla (1) si ha

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \frac{1+\cos x}{2} \qquad (2)$$

cerchiamo di ottenere una equazione goniometrica in una sola funzione goniometrica.

Dalla relazione fondamentale sappiamo che:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \; ; \quad \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \qquad (3)$$

(3) in (2):

$$1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1+\cos x}{2} \; ; \quad \frac{\cancel{2} - 2\cos^2 x}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{2} - (1+\cos x)}{\cancel{2}}$$

$$-2\cos^2 x = -1 - \cos x \; ; \quad -2\cos^2 x + 1 + \cos x = 0 \; ;$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \; ; \quad \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(2)(-1)}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} =$$

$$= \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

1) $\cos x = 1$

2) $\cos x = -\frac{1}{2}$

da 1) si ha

$\cos x = 1$; $\cos x = \cos 0 = 1$;

$x = 0 + 2\pi k$; $\boxed{x = k 2\pi}$

da 2) si ha

$\cos x = -\frac{1}{2}$; $\cos x = \cos \frac{2}{3}\pi = \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

$\boxed{x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi}$

Esercizio

$$\operatorname{sen} x + \cos\frac{x}{2} = 0 \quad (1)$$

osserviamo che se sostituiamo $\cos\frac{x}{2}$ con le formule di bisezione dobbiamo introdurre i radicali e ciò è spesso sconveniente.

È preferibile vedere $\operatorname{sen} x$ come $\operatorname{sen} 2\frac{x}{2}$ e svilupparlo con le formule di duplicazione.

da (1)

$$\operatorname{sen} 2\cdot\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0 \quad (2)$$

$$2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0; \quad \cos\frac{x}{2}\left(2\operatorname{sen}\frac{x}{2} + 1\right) = 0;$$

$\cos\frac{x}{2} = 0$ primo fattore

$2\operatorname{sen}\frac{x}{2} + 1$ secondo fattore

dal 1° fattore $\cos\frac{x}{2} = 0; \quad \cos\frac{x}{2} = \cos\frac{\pi}{2} = 0;$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad x = \pi + 2k\pi; \quad \boxed{x = \pi + k2\pi} \quad (3)$$

dal secondo fattore

$$2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} + 1 = 0 \qquad (4)$$

$$2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} = -1 ; \quad \operatorname{sen} \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$$

dalle tabelle del seno $\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \operatorname{sen} \frac{7}{6}\pi = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

dalla 1ª uguaglianza

$$\frac{x}{2} = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi ; \quad x = \cancel{2}^{1} \cdot \frac{7}{\cancel{6}_{3}}\pi + 4k\pi ;$$

$$\boxed{x = \frac{7}{3}\pi + 4k\pi} \qquad (5)$$

dalla 2ª uguaglianza

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \quad x = \cancel{2}^{1} \cdot \left(-\frac{\pi}{\cancel{6}_{3}}\right) + 4k\pi ;$$

$$\boxed{x = -\frac{\pi}{3} + 4\pi k} \qquad (6)$$

Esempio

$$\text{sen}\,4x - \text{sen}\,2x - \text{sen}\,x = 0 \qquad (1)$$

applichiamo le formule di prostaferesi

al binomio

$$\text{sen}\,4x - \text{sen}\,2x$$

$$\text{sen}\,p - \text{sen}\,q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cdot\text{sen}\,\frac{p-q}{2}$$

$p = 4x$ e $q = 2x$

$$\text{sen}\,4x - \text{sen}\,2x = 2\cos\frac{4x+2x}{2}\cdot\text{sen}\,\frac{4x-2x}{2} =$$

$$= 2\cos 3x \cdot \text{sen}\,x = 2\cos 3x \cdot \text{sen}\,x \qquad (2)$$

(1) diviene

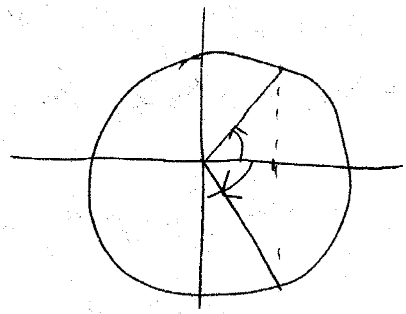
$$2\cos 3x \cdot \text{sen}\,x - \text{sen}\,x = 0 \qquad (3)$$

$\text{sen}\,x\,(2\cos 3x - 1) = 0$; 1° fattore $\text{sen}\,x = 0$

e 2° fattore $2\cos 3x - 1 = 0$

dal 1° fattore $\text{sen}\,x = 0$ $\quad \boxed{x = K\pi} \quad (4)$

$2\cos 3x = 1$; $\cos 3x = \frac{1}{2}$



$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ e $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$\cos 3x = \cos \frac{\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

dalla 1ª uguaglianza

$3x = \frac{\pi}{3} + K2\pi$; $\boxed{x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}K\pi}$ (5)

dalla 2º uguaglianza

$\cos 3x = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; $3x = -\frac{\pi}{3} + K2\pi$;

$\boxed{x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}K\pi}$ (6)

(4), (5), (6) sono le famiglie delle soluzioni.

Esempio

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x = 0 \qquad (1)$$

È evidente che l'applicazione delle formule di prostaferesi è la via più conveniente.

Vediamo quale idea percorriamo al fine di scegliere 2 tra i 3 addendi a cui applicare le formule.

Solitamente conviene trovare 2 addendi tale che sia sommando che sottraendo otteniamo 2 valori pari, che a loro volta possono essere divisi per 2.

Utilizzando tale criterio di scelta utilizziamo 1° e 3° addendo.

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2} \qquad (2)$$

la applichiamo a

$$\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x \qquad (3)$$

$$\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{3x+x}{2} \cdot \cos \frac{3x-x}{2} =$$

$= 2 \text{ sen } 2x \cdot \cos x \qquad (4)$

dalla (1) si ottiene

$$2 \text{ sen } 2x \cdot \cos x + \text{sen } 2x = 0$$

$$\text{sen } 2x \left(2 \cos x + 1 \right) = 0$$

1° fattore $\text{sen } 2x = 0$

2° fattore $2 \cos x + 1 = 0$; $2 \cos x = -1$; $\cos x = -\frac{1}{2}$

Dal 1° fattore

$$\text{sen } 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sen } 2x = \text{sen } 0 = \text{sen } \pi \;;$$

da 1° e 2° membro

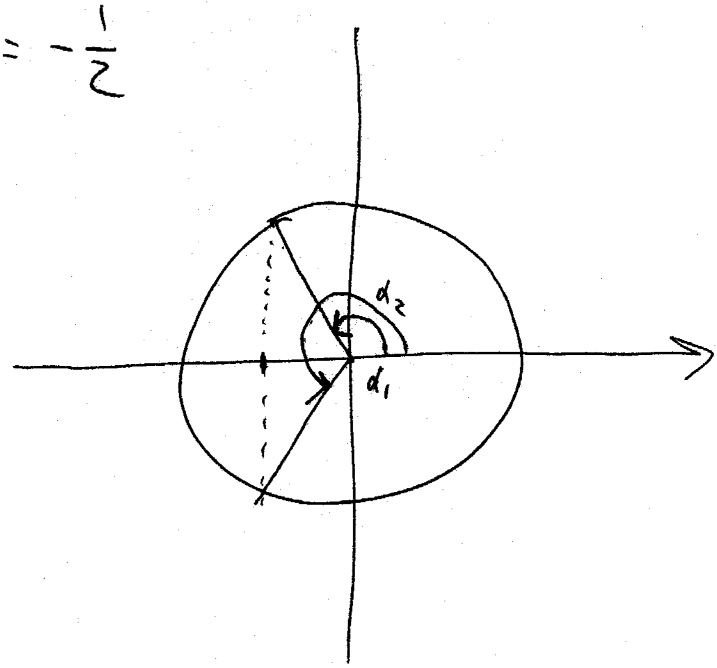
$$2x = 0 + 2\pi K \;; \quad \boxed{x = \pi K} \qquad (5)$$

da 1° e 3° membro

$$2x = \pi + 2\pi K \;; \quad \boxed{x = \frac{\pi}{2} + \pi K} \qquad (6)$$

Dal 2° fattore si ha

$\cos x = -\frac{1}{2}$



Sappiamo che $\alpha_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi - \pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

$\alpha_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + \pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$

da cui

$\cos x = \cos \frac{2}{3}\pi = \cos \frac{4}{3}\pi$

da 1° e 2° si ha

$\boxed{x = \frac{2}{3}\pi + k2\pi}$ (7)

da 1° e 3° si ha

$\boxed{x = \frac{4}{3}\pi + k2\pi}$ (8)

Esempio

$$\cos nx + \cos(n-2)x - \cos x = 0 \qquad (1)$$

applichiamo le formule di prostaferesi al 1° e 2° addendo

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2} \qquad (2)$$

$$p = nx \; ; \; q = (n-2)x \qquad (3)$$

da (1)

$$2\cos\frac{nx+(n-2)x}{2} \cdot \cos\frac{nx-(n-2)x}{2} - \cos x = 0 \; ;$$

$$2\cos\frac{nx+nx-2x}{2} \cdot \cos\frac{\cancel{nx}-\cancel{nx}+2x}{2} - \cos x = 0 \; ;$$

$$2\cos\frac{2nx-2x}{2} \cdot \cos\frac{2x}{2} - \cos x = 0$$

$$2\cos\frac{2(nx-x)}{2} \cdot \cos x - \cos x = 0$$

$$2\cos(nx-x) \cdot \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x\left[2\cos(nx-x) - 1\right] = 0 \qquad (4)$$

1° fattore $\cos x = 0$ (5)

2° fattore $2\cos(4x - x) - 1 = 0$ (6)

dal 1° fattore

$\cos x = 0$;

$\cos x = \cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{3}{2}\pi$

dal 1° e 2° membro

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi} \quad (7)$$

da 1° e 3° membro

$$\boxed{x = \frac{3}{2}\pi + k2\pi} \quad (8)$$

ovviamente le (7) e le (8) possono essere riassunte nella

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi} \quad (9)$$

dal 2° fattore

$$2\cos(nx-x)-1=0 \qquad (10)$$

$$\cos(nx-x)=\frac{1}{2} \qquad (11)$$

da cui

$$\cos(nx-x)=\cos\frac{\pi}{3}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

dal 1° e 2° membro

$$nx-x=\frac{\pi}{3}+K2\pi$$

$$x(n-1)=\frac{\pi}{3}+K2\pi;$$

$$x=\frac{\frac{\pi}{3}}{n-1}+\frac{K2\pi}{n-1}$$

$$\boxed{x=\frac{\pi}{3(n-1)}+\frac{K2\pi}{n-1}} \qquad (11)$$

dal 1° e 3° membro si ha

$$nx-x=-\frac{\pi}{3}+K2\pi$$

$$x(n-1)=-\frac{\pi}{3}+\frac{K2\pi}{\cancel{}}$$

$$x=-\frac{\pi}{3(n-1)}+\frac{K2\pi}{n-1} \qquad (12)$$

la (11) e la (12) possono essere sintetizzate nella

$$x=\pm\frac{\pi}{3(n-1)}+\frac{K2\pi}{n-1} \qquad (13)$$

Esercizio

$$\sqrt{2}\ \text{sen}x + \sqrt{6}\ \cos x = 0 \quad (1)$$

dividiamo la (1) per $\cos x$

$$\sqrt{2}\ \frac{\text{sen}x}{\cos x} + \sqrt{6}\ \frac{\cos x}{\cos x} = 0;$$

$$\sqrt{2}\ tg x + \sqrt{6} = 0 \quad (2)$$

Verifichiamo se $x = \pm \frac{\pi}{2}$ è soluzione

inseriamo $x = \frac{\pi}{2}$ nella (1)

$$\sqrt{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{6}\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \ (3)$$

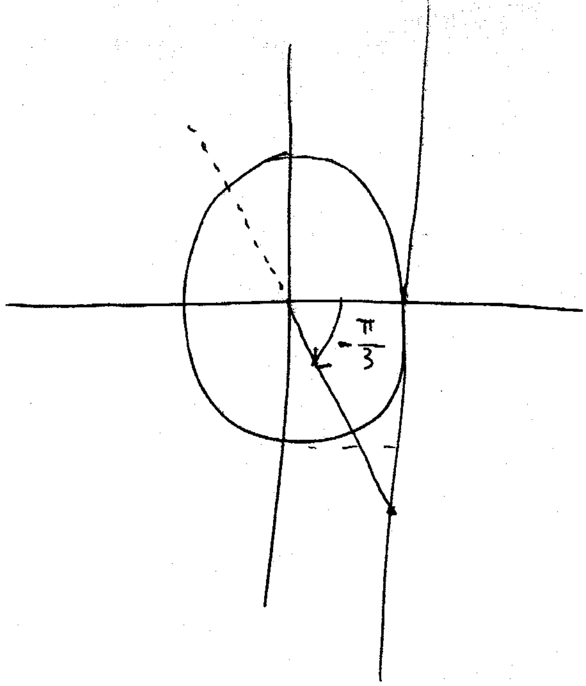
$\sqrt{2} \cdot 1 + \sqrt{6} \cdot 0 = 0$; $\sqrt{2} = 0$ (falso) quindi

$\boxed{x = \pm \frac{\pi}{2} \text{ non è soluzione}}$

risolviamo la (2)

$$\sqrt{2}\ tg x = -\sqrt{6}; \quad tg x = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}};$$

$$tg x = -\sqrt{3}$$



$$\alpha_1 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$$

$x_1 = \frac{5}{3}\pi$ è soluzione

$$\boxed{x_1 = \frac{5}{3}\pi + k2\pi} \quad (4)$$

Inoltre se $\frac{5}{3}\pi$ è soluzione, implica che

$$x_2 = \frac{5}{3}\pi + \pi + k2\pi$$

$$x_2 = \frac{5\pi + 3\pi}{3} + k2\pi \; ; \; x_2 = \frac{8\pi}{3} + k2\pi$$

Visto che $\frac{8\pi}{3}$ supera i 2π togliamo la misura dell'angolo giro

$$x_2 = \left(\frac{8}{3}\pi - 2\pi\right) + k2\pi \; ; \; x_2 = \left(\frac{8\pi - 6\pi}{3}\right) + k2\pi \; ;$$

$$\boxed{x_2 = \frac{2}{3}\pi + k2\pi} \quad (5)$$

La (4) e la (5) possono essere accorpate nella

$$\boxed{x = \frac{2}{3}\pi + K\pi} \quad (6)$$

In definitiva la (6) è la soluzione.

99

Esempio

$3 \sec x = 2 \operatorname{cosec} x \quad (1)$

Sappiamo che

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad (2) \qquad e$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad (3)$$

$$3 \frac{1}{\cos x} = 2 \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad (4)$$

$$\frac{3}{\cos x} = \frac{2}{\operatorname{sen} x} \; ; \quad 3 \operatorname{sen} x = 2 \cos x \; ;$$

$$3 \operatorname{sen} x - 2 \cos x = 0 \quad (5)$$

dividiamo la (5) per $\cos x$

$$\frac{3 \operatorname{sen} x}{\cos x} - \frac{2 \cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}} = 0 \; ; \quad 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0 \; ; \quad 3 \operatorname{tg} x = 2$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2}{3} \quad (6)$$

nella tabella dei valori della tangente il valore $\frac{2}{3}$ non c'è per cui applichiamo la funzione arctg alla (6)

$$x = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} \quad (7) \qquad x = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + K\pi$$

Nella scala decimale la (7) diviene

$$\alpha = 33{,}690067525^d$$

La famiglia delle soluzioni è

$$x = 33{,}690067525^d + K\,180^\circ$$

Avendo diviso per $\cos x$ dobbiamo verificare se $x = \frac{\pi}{2}$ è soluzione:

dalla (5) $\quad 3 \operatorname{sen} x - 2 \cos x = 0 \quad (5)$

$$3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - 2 \cos \frac{\pi}{2} = 0; \quad 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 0; \quad 3 = 0$$

(falso) quindi $x = \frac{\pi}{2}$ NON è soluzione.

Esempio

$$3 \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x = -\sqrt{3} \qquad (1)$$

$$3 \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3} = 0 \qquad (2)$$

sappiamo che $\cos x = \dfrac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} \qquad (3)$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2 \, tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} \qquad (4)$$

la (1) diviene

$$3 \, \frac{2 \, tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} + \sqrt{3} \, \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} + \sqrt{3} = 0$$

$$\frac{3\left(2 \, tg \frac{x}{2}\right) + \sqrt{3}\left(1 - tg^2 \frac{x}{2}\right) + \sqrt{3}\left(1 + tg^2 \frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = 0$$

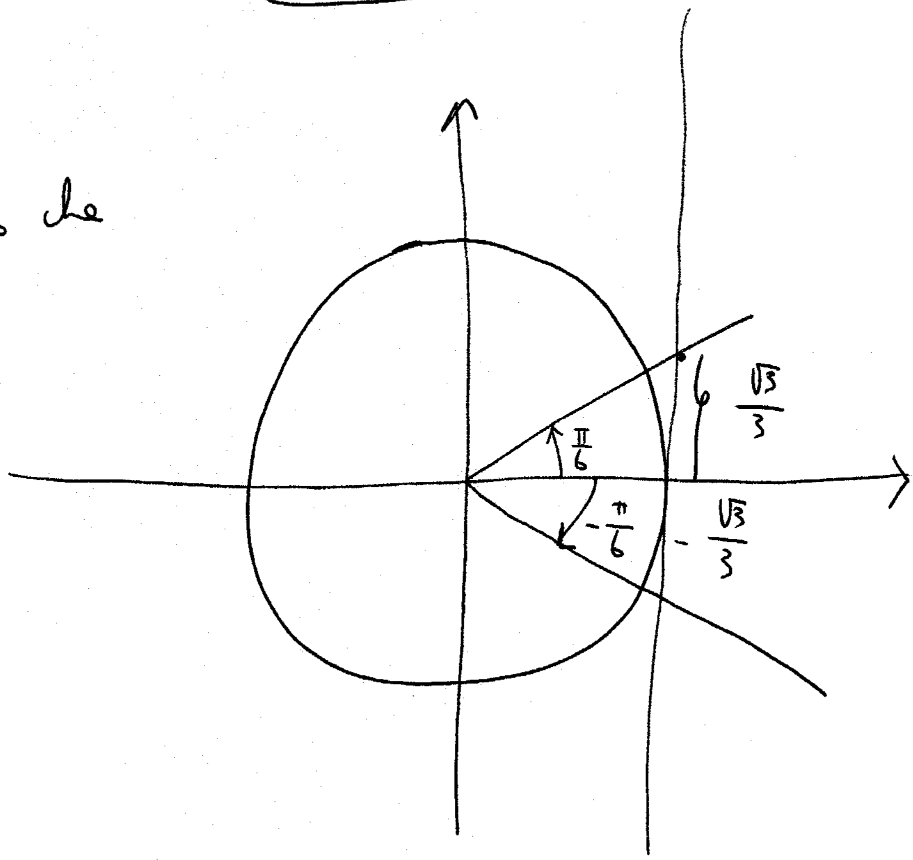
$$6 \, tg \frac{x}{2} + \sqrt{3} - \cancel{\sqrt{3} \, tg^2 \frac{x}{2}} + \sqrt{3} + \cancel{\sqrt{3} \, tg^2 \frac{x}{2}} = 0$$

$$6 \, tg \frac{x}{2} + 2\sqrt{3} = 0$$

$$3\,tg\frac{x}{2}+\sqrt{3}=0$$

$$3\,tg\frac{x}{2}=-\sqrt{3}\,;\qquad \boxed{tg\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}}\quad(5)$$

Sappiamo che



$$tg\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}\qquad(6)$$

trasformiamo $\alpha=-\frac{\pi}{6}$ in angolo positivo, cioè facciamo il complementare a 2π

$$-\frac{\pi}{6}=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{12\pi-\pi}{6}=\frac{11}{6}\pi$$

quindi

$$tg\left(\frac{11}{6}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}\qquad(7)$$

Confrontiamo la (5) e la (7)

$$tg\left(\frac{x}{2}\right) = tg\left(\frac{11}{6}\pi\right) \quad ;$$

$$\frac{x}{2} = \frac{11}{6}\pi + K\pi \;; \qquad x = \frac{\cancel{2}\cdot 11}{\cancel{6}_3}\pi + K2\pi \;;$$

$$\boxed{x = \frac{11}{3}\pi + K2\pi} \quad (8)$$

Visto che $\frac{11}{3}\pi$ è maggiore dell'angolo giro 2π sottraiamo 2π da $\frac{11}{3}\pi$

$$\frac{11}{3}\pi - 2\pi = \frac{11\pi - 6\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$$

$$\boxed{x = \frac{5}{3}\pi + K2\pi \qquad (9)}$$

Calcoliamo quanti gradi decimali sono $\frac{5}{3}\pi$

$$\alpha^R : 2\pi = \alpha^d : 360$$

$$\alpha^d = \frac{\alpha^R \cdot 360}{2\pi} \;; \quad \alpha^d = \frac{\frac{5}{3}\cancel{\pi}\cdot \cancel{360}^{180}}{\cancel{2}\cancel{\pi}} \;;$$

$$\alpha^d = \frac{5\cdot \cancel{180}^{60}}{\cancel{3}_1} \;; \qquad \boxed{\alpha^d = 300} \qquad (10)$$

Quindi

$$(11)\quad x = 300^{d} + K\, 2 \cdot 180 \,;$$ è una famiglia di soluzioni

che in radianti equivale

$$\boxed{x = \frac{5}{3}\pi + K\, 2\pi} \quad (12)$$

Visto che la (3) e la (4) non fanno stimare se $x = \pi$ è o non è soluzione essendoci nella formula $tg \frac{x}{2}$ e come sappiamo se $\frac{x}{2}$ vale $\frac{\pi}{2}$ il valore della tangente è ∞, verifichiamo se $x = \pi$ verifica la (1)

$$3 \, sen \, \pi + \sqrt{3} \cos \pi = -\sqrt{3} \,;$$

$$3 \cdot 0 + \sqrt{3} \cdot (-1) = -\sqrt{3} \,;$$

$$0 - \sqrt{3} = -\sqrt{3} \,; \quad -\sqrt{3} = -\sqrt{3} \implies$$

$\boxed{x = \pi + K\, 2\pi \text{ è soluzione}}$ (13)

In definitiva la (12) e la (13) sono le famiglie di soluzione

Esempio

$$(2+\sqrt{3})\,\mathrm{sen}\,x + \cos x + 2 + \sqrt{3} = 0 \quad (1)$$

e.g.l.

$$(2+\sqrt{3})\,\frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + 2+\sqrt{3} = 0$$

$$\frac{(2+\sqrt{3})\cdot 2tg\frac{x}{2} + 1 - tg^2\frac{x}{2} + (2+\sqrt{3})\left(1+tg^2\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 0$$

$$\frac{(2+\sqrt{3})\left(2tg\frac{x}{2} + 1 + tg^2\frac{x}{2}\right) + 1 - tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 0$$

$$\frac{4tg\frac{x}{2} + 2 + 2tg^2\frac{x}{2} + 2\sqrt{3}\,tg\frac{x}{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3}\,tg^2\frac{x}{2} + 1 - tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 0$$

$$\frac{tg^2\frac{x}{2}\left(2+\sqrt{3}-1\right) + tg\frac{x}{2}\left(4+2\sqrt{3}\right) + \left(2+\sqrt{3}+1\right)}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 0$$

$$\left(1+\sqrt{3}\right)tg^2\frac{x}{2}+\left(4+2\sqrt{3}\right)tg\frac{x}{2}+\left(3+\sqrt{3}\right)=0$$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{-\left(4+2\sqrt{3}\right)\pm\sqrt{\left(4+2\sqrt{3}\right)^2-4\left(1+\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}}{2\left(1+\sqrt{3}\right)};$$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{-\left(4+2\sqrt{3}\right)\pm\sqrt{16+12+16\sqrt{3}-4\left(3+\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3\right)}}{2+2\sqrt{3}};$$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{-\left(4+2\sqrt{3}\right)\pm\sqrt{28+16\sqrt{3}-4\left(6+4\sqrt{3}\right)}}{2+2\sqrt{3}};$$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{-\left(4+2\sqrt{3}\right)\pm\sqrt{28+\cancel{16\sqrt{3}}-24-\cancel{16\sqrt{3}}}}{2+2\sqrt{3}};$$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{-\left(4+2\sqrt{3}\right)\pm\sqrt{4}}{2+2\sqrt{3}};$$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{-\left(4+2\sqrt{3}\right)\pm 2}{2+2\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{-4-2\sqrt{3} \pm 2}{2+2\sqrt{3}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-4-2\sqrt{3}+2}{2+2\sqrt{3}} = \dfrac{-2-2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}} = \\[2em] \dfrac{-4-2\sqrt{3}-2}{2+2\sqrt{3}} = \dfrac{-6-2\sqrt{3}}{2+2\sqrt{3}} = \end{cases}$$

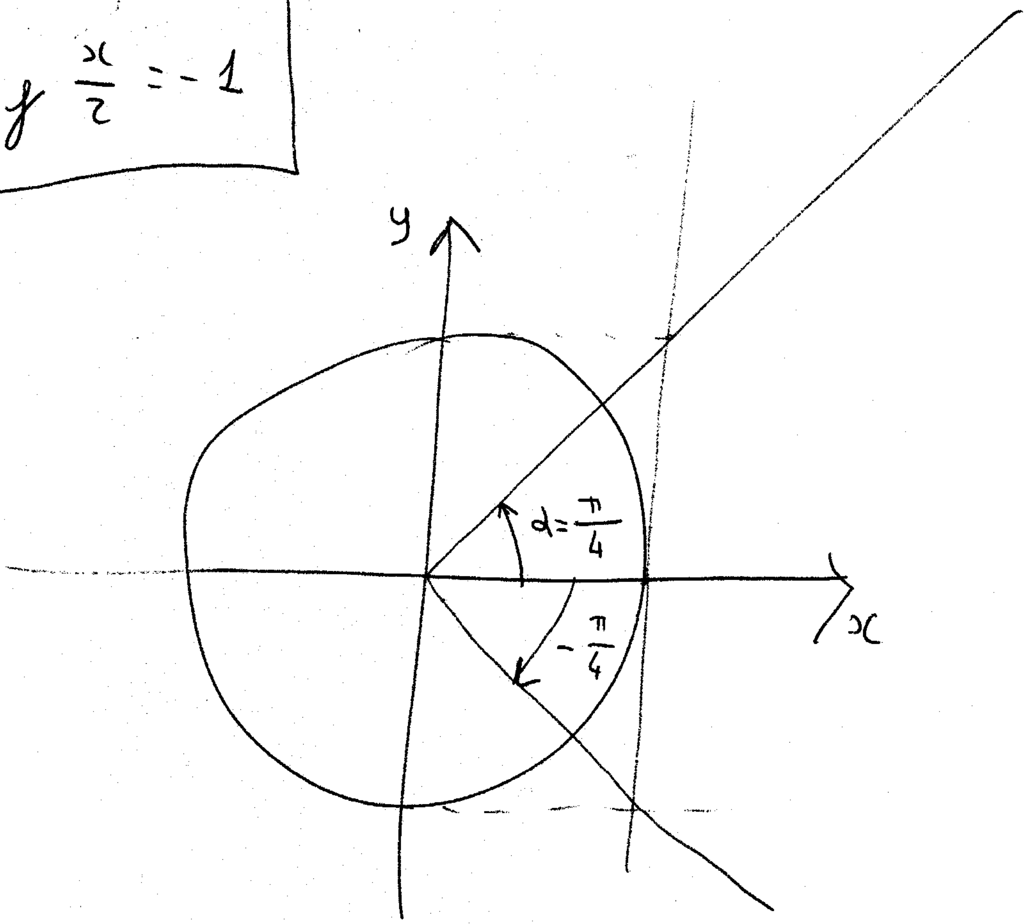
$$\begin{cases} \dfrac{-(2+2\sqrt{3})}{2+2\sqrt{3}} = -1 \\[2em] \dfrac{2(-3-\sqrt{3})}{2+2\sqrt{3}} = \dfrac{\cancel{2}^{1}(-3-\sqrt{3})}{\cancel{2}_{1}(1+\sqrt{3})} = \dfrac{-3-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \end{cases}$$

In definitiva

$tg\frac{x}{2} = -1$ e $tg\frac{x}{2} = \frac{-3-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

Studiamo

$\boxed{tg\frac{x}{2} = -1}$



dalle tabelle sappiamo che $tg\frac{\pi}{4} = 1$ da cui

$tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$

per misurare l'angolo in modo positivo facciamo il complementare a 2π

$-\frac{\pi}{4} = 2\cancel{\pi} - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi - \pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$

da cui

$$tg\,\frac{7}{4}\pi = -1$$

$$tg\,\frac{x}{2} = tg\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -1\ ;$$

$$\frac{x}{2} = \frac{7}{4}\pi + K\pi\ ;\quad x = 2 \cdot \frac{7}{4}\pi + K\,2\pi$$

$$\boxed{x = \frac{7}{2}\pi + K\,2\pi}$$ prima famiglia di soluzioni

Calcoliamo il valore $\frac{7}{2}\pi$ inferiore a 2π

$$\frac{7}{2}\pi - 2\pi = \frac{7\pi - 4\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$$ da cui

$$\boxed{x = \frac{3}{2}\pi + K\,2\pi}$$ Prima famiglia di soluzioni

$$\frac{3}{2}\pi = 270^\circ$$

Lavoriamo con la seconda radice

$$tg\,\frac{x}{2} = \frac{-3-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

$$tg\,\frac{x}{2} = \frac{-2-1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{-2-(1+\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{-2}{1+\sqrt{3}} - \frac{1\cancel{+\sqrt{3}}}{1\cancel{+\sqrt{3}}} = -\frac{2}{1+\sqrt{3}} - 1 =$$

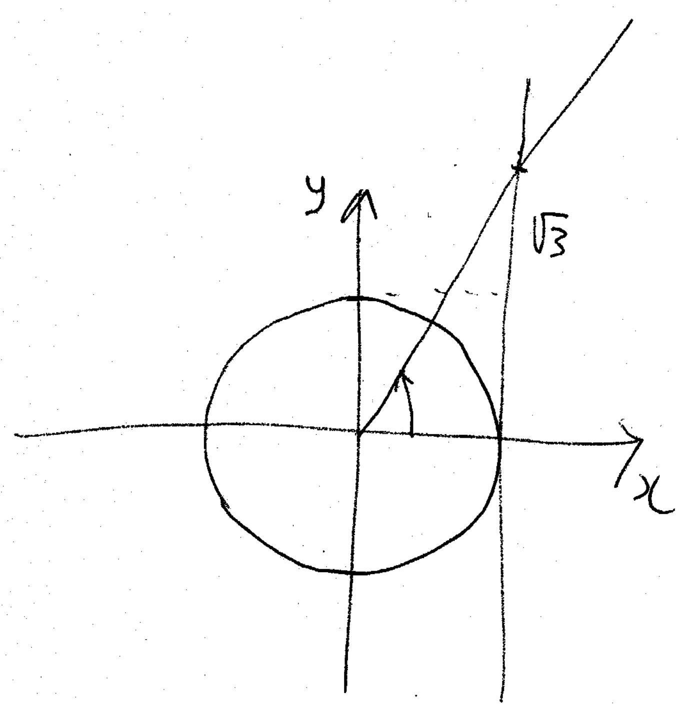
$$= -\frac{2(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} - 1 = -\frac{2-2\sqrt{3}}{1-3} - 1 =$$

$$= -\frac{2-2\sqrt{3}}{-2} - 1 = \frac{2-2\sqrt{3}}{2} - 1 =$$

$$= \frac{2(1-\sqrt{3})}{2} - 1 = 1-\sqrt{3} - 1 = -\sqrt{3}$$

cioè

$$\boxed{tg\,\frac{x}{2} = -\sqrt{3}}$$



dalle tabelle sappiamo che

$$tg\ \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

quindi

$$tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

Esprimiamo l'angolo in notazione positiva

$$-\frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

quindi

$$tg\left(\frac{5}{3}\pi\right) = -\sqrt{3}$$

in definitiva

$$tg\ \frac{x}{2} = tg\ \frac{5}{3}\pi$$

$$\frac{x}{2} = \frac{5}{3}\pi + K\pi \ ; \quad x = 2 \cdot \frac{5}{3}\pi + K2\pi \ ;$$

$x = \frac{10}{3}\pi + K2\pi$; sottraiamo l'angolo giro 2π

$$\frac{10}{3}\pi - 2\pi = \frac{10\pi - 6\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

pertanto

$$\boxed{x = \frac{4}{3}\pi + K2\pi}$$

è la seconda famiglia di soluzioni

Calcoliamo quanti decimali vale $\frac{4}{3}\pi$

$$\alpha^R : 2\pi = \alpha^d : 360;$$

$$\frac{4}{3}\pi : 2\pi = \alpha^d : 360; \quad \alpha^d = \frac{\frac{4}{3}\cancel{\pi} \cdot 360}{2\cancel{\pi}}$$

$$\alpha^d = \frac{\frac{4 \cdot \cancel{360}^{120}}{\cancel{3}}}{2} = \frac{\cancel{4}^{2} \cdot 120}{\cancel{2}} = 240$$

$$\alpha^d = 240°$$

Visto che si tratta di un'equazione goniometrica lineare (e.g.l.) e nella tecnica di calcolo abbiamo introdotto la tangente dobbiamo verificare se

$$x = \pi$$

è oppure no soluzione.

Inseriamo nella traccia $x = \pi$

(1) $(2+\sqrt{3})\,\text{sen}\,\pi + \cos\pi + 2 + \sqrt{3} = 0$

$(2+\sqrt{3}) \cdot 0 + (-1) + 2 + \sqrt{3} = 0; \quad -1 + 2 + \sqrt{3} = 0$ (falso) quindi (114)

$$x = \pi$$

non è soluzione.

In definitiva le famiglie delle soluzioni sono:

1) $x = \frac{3}{2}\pi + K2\pi$ cioè $x = 270° + K360$

2) $x = \frac{4}{3}\pi + K2\pi$ cioè $x = 240° + K\cdot 360$

Esercizio

$$2 \operatorname{sen}x \cos x = 1 \quad (1) \quad \overset{\text{Famiglia}}{(e.g.o)}$$

Rendiamo la (1) omogenea. Sappiamo che

$$1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x \qquad (2)$$

La (1) diviene $\quad 2 \operatorname{sen}x \cos x = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x \qquad (3)$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - 2 \operatorname{sen}x \cos x = 0 \quad (4)$$

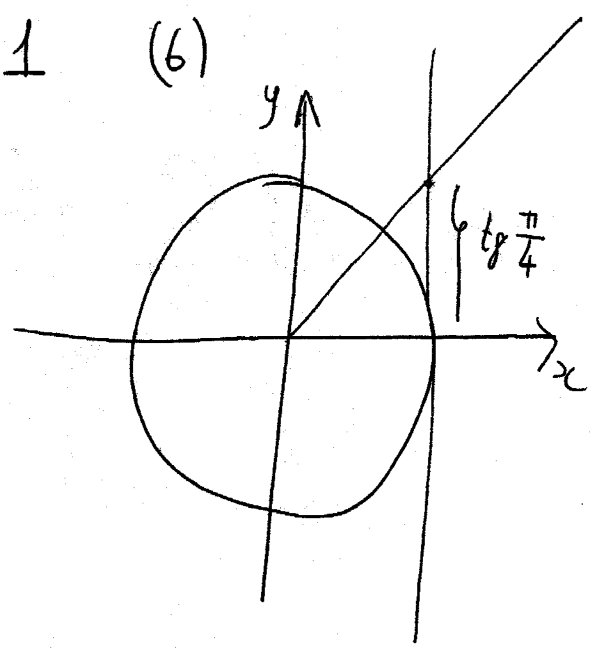
La (4) è equivalente alla (1). Dividiamo la (4) per $\cos^2 x$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2 \operatorname{sen}x \cancel{\cos x}}{\cos^{\cancel{2}} x} = 0$$

$$tg^2 x + 1 - 2 tg x = 0; \quad tg^2 x - 2tg x + 1 = 0 \quad (5)$$

$$tg x = \frac{+2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$tg x = 1 \qquad (6)$$



dalla tabella dei valori della tangente si ha

$$tg\,\frac{\pi}{4} = 1$$

per cui

$$tg\,x = tg\,\frac{\pi}{4} = 1;$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + K\pi} \quad (7)$$

la (7) rappresenta una famiglia di soluzioni.

In precedenza, nel passaggio dalla (4) alla (5) abbiamo diviso per $\cos^2 x$, quindi perdendo la possibilità di valutare se $x = \frac{\pi}{2}$ è soluzione.

Procediamo alla verifica puntuale inserendo $x = \frac{\pi}{2}$ nella traccia

$$2\,sen\,\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 1; \quad 2 \cdot 1 \cdot 0 = 1; \quad 0 = 1 \quad (\text{falso})$$

quindi $x = \frac{\pi}{2}$ NON è soluzione.

In definitiva l'unica famiglia di soluzioni è la (7).

Esempio (117)

$$\operatorname{sen}x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \qquad (1) \qquad \left(\begin{matrix}\text{famiglie}\\ \text{e.g.o}\end{matrix}\right)$$

$$\operatorname{sen}x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right) = 0$$

$$\operatorname{sen}x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{sen}^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos^2 x = 0 \qquad (2)$$

dividiamo la (2) per $\cos^2 x$

$$\frac{\operatorname{sen}x \cancel{\cos x}}{\cos^{\cancel{2}} x} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}} = 0 \qquad (3)$$

$$\operatorname{tg}x + \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{tg}^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}x + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg}x + \sqrt{3}}{4} = \frac{0}{4};$$

$$\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg}x + \sqrt{3} = 0;$$

$$\operatorname{tg}x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(\sqrt{3})(\sqrt{3})}}{2\sqrt{3}} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-4 \pm 2}{2\sqrt{3}} = \frac{\cancel{2}(-2 \pm 1)}{\cancel{2}\sqrt{3}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-2-1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{3}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}\,\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}} = -\sqrt{3} \\[2ex] \dfrac{-2+1}{\sqrt{3}} = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

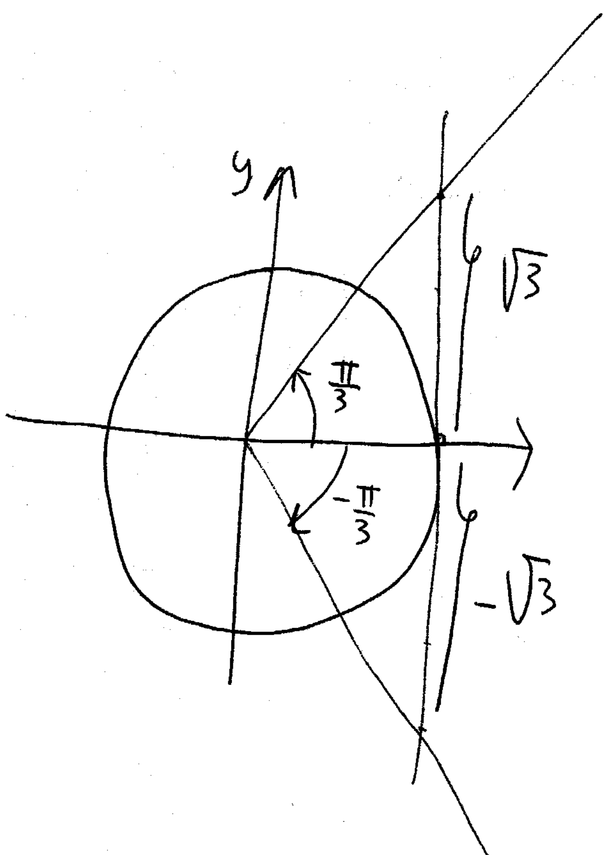
Le soluzioni sono

$$tg\,x = -\sqrt{3} \qquad (5)$$

$$tg\,x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad (6)$$

Risolviamo la (5)

$$tg\,x = -\sqrt{3}$$



dalla tabella dei valori della tangente si ha: (119)

$$tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \quad \text{quindi}$$

$$tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \quad (7)$$

$$tg\,x = tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad (8)$$

$$\boxed{x = -\frac{\pi}{3} + K\pi} \quad (9)$$

è una famiglia di soluzioni

determiniamo il valore $x = -\frac{\pi}{3}$ in notazione positiva

$$x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$$

$$\boxed{x = \frac{5}{3}\pi + K\pi} \quad (10)$$

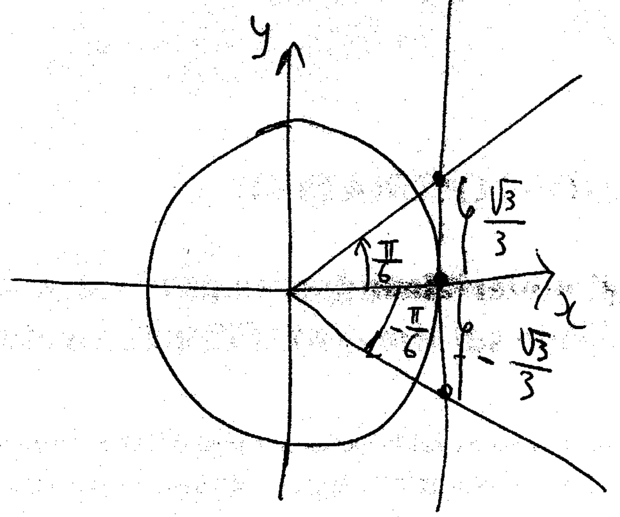
Soluzione

Risolviamo la (6)

$$tg\,x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad ; \quad tg\,x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tg\,x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (11)$$

dai valori della tangente ~~[illegible]~~ si sa che $tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$



da cui

$$tg\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (12)$$

$$tg\,x = tg\left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad (13)$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + K\pi \quad (14)$$

$$x = 2\pi - \frac{\pi}{6} + K\pi \quad (15)$$

$$x = \frac{12\pi - \pi}{6} + K\pi \; ; \quad \boxed{x = \frac{11}{6}\pi + K\pi \quad (16)}$$

La (16) è la seconda famiglia di soluzioni.

Visto che nella (3) abbiamo diviso per Cos x

Verifichiamo se $x = \frac{\pi}{2}$ è soluzione.

Inseriamo $x = \frac{\pi}{2}$ nella traccia

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

$$1 \cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \; ; \quad \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \quad (\text{falso})$$

quindi

$x = \frac{\pi}{2}$ NON è Soluzione

Riassumendo le famiglie di soluzione sono:

1) $x = \frac{5}{3}\pi + k\pi$

2) $x = \frac{11}{6}\pi + k\pi$

Esempio

$$\sqrt{3}\ \operatorname{sen}^2 x - (1+\sqrt{3})\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x = 0 \quad (1)\ (e.g.0)$$

dividiamo per $\cos^2 x$

$$\frac{\sqrt{3}\ \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{(1+\sqrt{3})\operatorname{sen} x \cancel{\cos x}}{\cos^2 x} + \frac{\cancel{\cos^2 x}^{\,1}}{\cancel{\cos^2 x}_{\,1}} = 0 \quad (2)$$

$$\sqrt{3}\ \operatorname{tg}^2 x - (1+\sqrt{3})\operatorname{tg} x + 1 = 0 \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{(1+\sqrt{3}) \pm \sqrt{(1+\sqrt{3})^2 - 4(\sqrt{3})(1)}}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(1+\sqrt{3}) \pm \sqrt{1+3+2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(1+\sqrt{3}) \pm \sqrt{1+3-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(1+\sqrt{3}) \pm \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}}{2\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3}) \pm (1-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(1+\sqrt{3}) \pm (1-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1+\cancel{\sqrt{3}}+1-\cancel{\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\[2ex] \dfrac{\cancel{1}+\sqrt{3}-\cancel{1}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1 \end{cases}$$

cioè

4) $\frac{\sqrt{3}}{3} = tg\, x$

5) $tg\, x = 1$

studiamo la 4) $tg\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

sappiamo che $tg \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, da cui

$tg\, x = tg \frac{\pi}{6}$; $\boxed{x = \frac{\pi}{6} + K\pi}$ (6)

Studiamo la 5) $tg\, x = 1$. Sappiamo che

$tg \frac{\pi}{4} = 1$ per cui $tg\, x = tg \frac{\pi}{4}$; $\boxed{x = \frac{\pi}{4} + K\pi}$ (7)

Verifichiamo se $x = \frac{\pi}{2}$ è soluzione

inseriamo $x = \frac{\pi}{2}$ in (1)

$$\sqrt{3}\, sen^2 \frac{\pi}{2} - (1+\sqrt{3})\, sen \frac{\pi}{2} \cdot cos \frac{\pi}{2} + cos^2 \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sqrt{3} \cdot 1 - (1+\sqrt{3}) \cdot 1 \cdot 0 + 0 = 0 ;$$

$$\sqrt{3} - 0 + 0 = 0 ; \quad \sqrt{3} = 0 \quad (\text{falso})$$

ciò dimostra che $x = \frac{\pi}{2}$ NON è soluzione.

In definitiva le soluzioni sono

$$(6) \quad x = \frac{\pi}{6} + K\pi$$

$$(7) \quad x = \frac{\pi}{4} + K\pi$$

Esempio

$$(4+2\sqrt{3}) \cdot \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = 3 + 2\sqrt{3} \qquad (1)$$

La (1) è riconducibile a e.g.o.

moltiplichiamo per $1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ il termine noto

$$(4+2\sqrt{3}) \cdot \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = (3+2\sqrt{3})(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) \quad (2)$$

$$(4+2\sqrt{3}) \cdot \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = 3 \operatorname{sen}^2 x + 3 \cos^2 x +$$

$$+ 2\sqrt{3} \operatorname{sen}^2 x + 2\sqrt{3} \cos^2 x \quad ;$$

$$\underline{(4+2\sqrt{3}) \operatorname{sen}^2 x} - 2 \operatorname{sen} x \cos x - \underline{3 \operatorname{sen}^2 x} - 3 \underline{\underline{\cos^2 x}} - \qquad (3)$$

$$- \underline{2\sqrt{3} \operatorname{sen}^2 x} - \underline{\underline{2\sqrt{3} \cos^2 x}} = 0$$

$$(4+\cancel{2\sqrt{3}} - 3 - \cancel{2\sqrt{3}}) \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x(-3 - 2\sqrt{3}) - 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0$$

(4)

$$\operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x - (3+2\sqrt{3}) \cos^2 x = 0 \quad (5)$$

dividiamo per $\cos^2 x$

(6)

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{(3+2\sqrt{3}) \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

126

$$tg^2 x - 2tg x - (3+2\sqrt{3}) = 0 \quad (7)$$

$$tg x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)\left[-(3+2\sqrt{3})\right]}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4(3+2\sqrt{3})}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12 + 8\sqrt{3}}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4(1+3+2\sqrt{3})}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{1+3+2\sqrt{3}}}{2} =$$

$$= \frac{\cancel{2}\left(1 \pm \sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)}{\cancel{2}} = 1 \pm \sqrt{4+2\sqrt{3}} =$$

$$= 1 \pm \sqrt{4+\sqrt{12}} = \qquad (8)$$

Risolviamo il radicale doppio

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

$$\sqrt{4+\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{16-12}}{2}} + \sqrt{\frac{4-\sqrt{16-12}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4+2}{2}} + \sqrt{\frac{4-2}{2}} = \sqrt{3} + 1$$

torniamo alla (8)

$$= 1 \pm \left(\sqrt{3}+1\right) = \begin{cases} 1+\sqrt{3}+1 = 2+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3}-1 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Riassumendo

(9) $tg\,x = 2+\sqrt{3}$

(10) $tg\,x = -\sqrt{3}$

Studiamo la (9)

$tg\,x = 2+\sqrt{3}$; dai valori della tangente si ha

$tg\left(\frac{5}{12}\pi\right) = 2+\sqrt{3}$ per cui

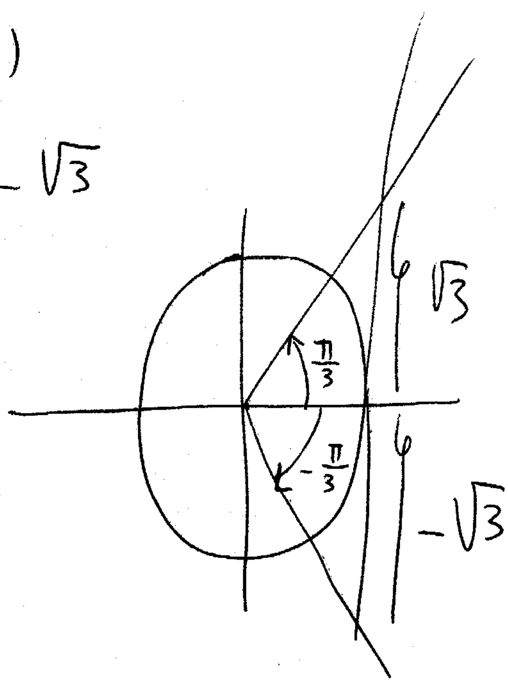
$tg\,x = tg\left(\frac{5}{12}\pi\right) = 2+\sqrt{3}$

$\boxed{x = \frac{5}{12}\pi + k\pi}$ 1 Soluzione

(11)

Studiamo la (10)

$tg\,x = -\sqrt{3}$



Dal grafico si desume

$$tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

Scriviamo in modo positivo $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$-\frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$$

$$tg\left(\frac{5}{3}\pi\right) = -\sqrt{3}$$

(12)

Da cui

$$tg\, x = tg\left(\frac{5}{3}\pi\right) \; ; \quad \boxed{x = \frac{5}{3}\pi + K\pi}$$ 2ª soluzione

Visto che abbiamo diviso per $\cos^2 x$ verifichiamo se $x = \frac{\pi}{2}$ è soluzione.

Dalla (1) si ha

$$(4 + 2\sqrt{3}) \cdot \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 3 + 2\sqrt{3}$$

$$(4 + 2\sqrt{3}) \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = 3 + 2\sqrt{3} \; ;$$

$4 + 2\sqrt{3} = 3 + 2\sqrt{3}$ (falso) quindi $x = \frac{\pi}{2}$ NON è soluzione.

In definitiva le soluzioni sono

$$x = \frac{5}{12}\pi + K\pi$$

$$x = \frac{5}{3}\pi + K\pi$$

Esercizio

$$7 \operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x = 4 \quad (1)$$

Rendiamola omogenea moltiplicando il termine noto per la relazione fondamentale $1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$

$$7 \operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x - 4(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = 0 \quad (2)$$

$$\underline{7 \operatorname{sen}^2 x} - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x + \underline{\underline{\cos^2 x}} \underline{- 4 \operatorname{sen}^2 x} \underline{\underline{- 4 \cos^2 x}} = 0 \quad (3)$$

$$3 \operatorname{sen}^2 x - 3 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x = 0 \quad (4)$$

dividiamo per $\cos^2 x$

$$\frac{3 \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3 \cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}} - \frac{2\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cancel{\cos x}}{\cos^{\cancel{2}} x} = 0 \quad (5)$$

$$3 \operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 3 = 0 \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{4 \cdot 3 - 4(3)(-3)}}{6} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 + 36}}{6} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{48}}{6} =$$

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$$48 = 2^4 \cdot 3$$

$$= \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{2^4 \cdot 3}}{6} = \frac{2\sqrt{3} \pm 2^2\sqrt{3}}{6} =$$

$$= \frac{\cancel{2}^{1}\left(\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}\right)}{\cancel{6}_{3}} = \frac{\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{3} = \begin{cases} \dfrac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}} = \sqrt{3} \\[2ex] \dfrac{-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Riassumendo:

$$tg\,x = \begin{cases} \sqrt{3} \\[2ex] -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

1) $tg\,x = \sqrt{3}$

2) $tg\,x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Tali equazioni goniometriche elementari, le abbiamo studiate più volte negli esempi precedenti e rispettivamente danno soluzioni:

$$\boxed{x_1 = \frac{\pi}{3} + K\pi}$$ 1ª Soluzione

$$\boxed{x_2 = \frac{5}{6}\pi + K\pi}$$ 2ª Soluzione