Equazioni di Secondo Grado in Una Variabile, x
Complete, Pure e Spurie.
Tecniche per risolverle ed Esempi svolti

Francesco Zumbo
www.francescozumbo.it
http://it.geocities.com/zumbof/

Questi appunti vogliono essere un ulteriore strumento didattico per gli studenti. Idea che mi é venuta dopo essere stato a contatto con bambini e studenti affetti da Sclerosi Multipla, costretti a lunghe degenze presso il Reparto di Neurologia dell'Ospedale di Fidenza (Parma), Divisione Diretta da una Eccezionale persona, il ***Prof. Enrico Montanari*** *a cui mia riconoscenza e stima andranno Sempre.*
A coloro che vorranno dare un piccolo contributo all'Associazione Nazionale per la Lotta Contro la Sclerosi Multipla (sezione di Parma) un Grande Grazie!!!
Conto Corrente Postale : 13 50 34 38 - Intestato a: AISM di Parma (Associazione Italiana Sclerosi Multipla) di Parma - Indirizzo: Piazzale S. Sepolcro, 3 - 43100 Parma (PR) - Telefono : 0521-231251.
Con la seguente Causale: **+ Matematica ,- Sclerosi Multipla**

1. Generalitá

Teorema 1.1. *Teorema Fondamentale dell'Algebra*
Data un'equazione di grado n

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0 \tag{1.1}$$

con $a_n, a_{n-1}, ..., a_0 \ \in \mathbb{R}$ (numeri Reali), essa ha n soluzioni $x_1, x_2, ..., x_n$ nei numeri Complessi $\mathbb{C}$, che soddisfano l'equazione.
Quindi una equazione di secondo grado ha 2 soluzioni.
Ricordiamo che se c'é una soluzione complessa , c'é anche la sua coniugata.

Definizione 1.2. *Equazione di secondo grado*

Si definisce equazione di secondo grado un'equazione dove il massimo valore dell'esponente della variabile é due.

Alcuni esempi

(1) $5x^2 + 3x - 7 = 0$
(2) $4x^2 - 3x = 0$
(3) $8x^2 - 7 = 0$

la forma piú generale di equazione di secondo grado é

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.2}$$

con a, b, c numeri $\in \mathbb{R}$.

Per uniformitá di notazione indicheremo, salvo altro esplicito avviso, sempre con a il coefficiente della x^2, con b il coefficiente della x e con c il $termine\ noto$.

Definizione 1.3. *Equazione di secondo grado completa*

Una equazione di secondo grado la si dice completa se i coefficienti a, b, c sono tutti diversi da zero

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.3}$$

ad esempio

$$5x^2 + 4x - 3 = 0 \tag{1.4}$$

in questo caso: $a = 5, b = 4, c = -3$

Definizione 1.4. *Equazione di secondo grado pura*

Una equazione di secondo grado la si dice pura, se manca il *termine noto* c. Per cui si presenta nella forma

$$ax^2 + bx = 0 \tag{1.5}$$

Definizione 1.5. *Equazione di secondo grado spuria*

Una equazione di secondo grado la si dice spuria, se manca il *termine in* x. Si presenta nella forma

$$ax^2 + c = 0 \tag{1.6}$$

2. Risoluzione delle equazioni di 2^o grado complete

Sia

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.1}$$

una equazione di secondo grado completa, per prima cosa si deve calcolare il ***Discriminante***

$$\Delta = b^2 - 4ac \tag{2.2}$$

successivamente le soluzioni dell'equazione sono date dalla

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{2.3}$$

con $x_{1,2}$ intendiamo le 2 soluzioni dell'equazione.
Per ottenerle separiamo le soluzioni dividendo il $\pm$ nel $+$ e nel $-$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{2.4}$$

e

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{2.5}$$

3. Esempio Svolto Equazione di 2^o grado completa

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Risolvere la seguente equazione di 2^o grado

$$\frac{2}{3}x^2 + 3x - 5 = 0 \tag{3.1}$$

iniziamo con il calcolare il $m.c.m$ al fine di eliminare le frazioni

$$\frac{2x^2 + 9x - 15}{3} = \frac{0}{3} \tag{3.2}$$

da cui

$$2x^2 + 9x - 15 = 0 \tag{3.3}$$

a questo punto abbiamo ridotto l'equazione (3.1) nella forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

quindi possiamo applicare la (2.2)

$$\Delta = b^2 - 4ac = (9)^2 - 4(2)(-15) = 81 + 120 = 201 \tag{3.4}$$

$$\Delta = 201 \tag{3.5}$$

e adesso la (2.3)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{201}}{4} \tag{3.6}$$

in questo caso continuiamo i calcoli in via decimale considerando le prime due cifre dopo la virgola

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm 14,49}{4} \tag{3.7}$$

da cui

$$x_1 = \frac{-9 + 14,49}{4} = \frac{5,49}{4} = 1,37 \tag{3.8}$$

$$x_1 = 1,37 \tag{3.9}$$

e

$$x_2 = \frac{-9 - 14,49}{4} = \frac{-23,49}{4} = -5,9 \tag{3.10}$$

$$x_2 = -5,9 \tag{3.11}$$

partendo dalla (3.6) possiamo procedere in altro modo, senza utilizzare l'approssimazione decimale. Il numero 210 é scomponibile soltanto nel prodotto $210 = 3{\cdot}67$ che sono entrambi numeri primi, quindi non ṕossibile portare quantitá fuori dal segno di radice, per cui le soluzioni saranno

$$x_1 = \frac{-9 + \sqrt{210}}{4} \tag{3.12}$$

e

$$x_2 = \frac{-9 - \sqrt{210}}{4} \tag{3.13}$$

4. Risoluzione equazione di secondo grado pura $ax^2 + bx = 0$

In queste equazioni si mette la x in evidenza

$$x(ax + b) = 0 \tag{4.1}$$

e si osserva che affinché un prodotto possa valere 0 almeno uno dei due fattori x o $(ax + b)$ deve valere 0.
La prima soluzione quindi é immediata

$$x_1 = 0 \tag{4.2}$$

la seconda la si calcola partendo da

$$ax + b = 0 \tag{4.3}$$

questa é una equazione di 1^o grado di semplicissima risoluzione

$$ax = -b \tag{4.4}$$

$$x_2 = -\frac{b}{a} \tag{4.5}$$

In definitiva le due soluzioni sono

$$x_1 = 0 \text{ e } x_2 = -\frac{b}{a} \tag{4.6}$$

5. Esempio Svolto equazione di secondo grado pura

$$ax^2 + bx = 0$$

Risolvere l'equazione

$$\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}x = 0 \tag{5.1}$$

calcoliamo il $m.c.m.$

$$\frac{4x^2 + 3x}{6} = \frac{0}{6} \tag{5.2}$$

essendo uguali i denominatori di entrambi i membri

$$4x^2 + 3x = 0 \tag{5.3}$$

mettiamo la x in evidenza

$$x(4x + 3) = 0 \tag{5.4}$$

la prima soluzione é

$$x_1 = 0 \tag{5.5}$$

la seconda deriva dallo studio di

$$4x + 3 = 0 \tag{5.6}$$

$$4x = -3 \tag{5.7}$$

$$x_2 = -\frac{3}{4} \tag{5.8}$$

6. Risoluzione equazione di secondo grado spuria $ax^2 + c = 0$

$$ax^2 + c = 0 \tag{6.1}$$

$$ax^2 = -c \tag{6.2}$$

$$x^2 = -\frac{c}{a} \tag{6.3}$$

(6.4) $$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

quindi le due soluzioni sono:

(6.5) $$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

e

(6.6) $$x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

7. Esempio svolto equazione di secondo grado spuria

$$ax^2 + c = 0$$

Studiamo la seguente equazione di secondo grado spuria

(7.1) $$\frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{5} = 0$$

calcolando il $m.c.m.$

(7.2) $$\frac{20x^2 - 3}{15} = \frac{0}{15}$$

(7.3) $$20x^2 - 3 = 0$$

(7.4) $$20x^2 = 3$$

(7.5) $$x^2 = \frac{3}{20}$$

(7.6) $$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{20}}$$

da cui le soluzioni

(7.7) $$x_1 = \sqrt{\frac{3}{20}}$$

(7.8) $$x_2 = -\sqrt{\frac{3}{20}}$$