Equazione della Circonferenza - Grafico di una Circonferenza - Intersezione tra Circonferenza e Retta

Francesco Zumbo

www.francescozumbo.it

http://it.geocities.com/zumbof/

Questi appunti vogliono essere un ulteriore strumento didattico per gli studenti. Idea che mi é venuta dopo essere stato a contatto con bambini e studenti affetti da Sclerosi Multipla, costretti a lunghe degenze presso il Reparto di Neurologia dell'Ospedale di Fidenza (Parma), Divisione Diretta da una Eccezionale persona, il ***Prof. Enrico Montanari*** *a cui mia riconoscenza e stima andranno Sempre.*

A coloro che vorranno dare un piccolo contributo all'Associazione Nazionale per la Lotta Contro la Sclerosi Multipla (sezione di Parma) un Grande Grazie!!!

Conto Corrente Postale : 13 50 34 38 - Intestato a: AISM di Parma (Associazione Italiana Sclerosi Multipla) di Parma - Indirizzo: Piazzale S. Sepolcro, 3 - 43100 Parma (PR) - Telefono : 0521-231251.

Con la seguente Causale: **+ Matematica ,- Sclerosi Multipla**

1. EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA γ

Si definisce circonferenza γ l'insieme di tutti dei punti $P \equiv (x;y)$ di un piano π, tali da avere distanza costante da un punto fisso detto centro, $C \equiv (\alpha, \beta)$, e tale distanza costante é il *raggio* r.

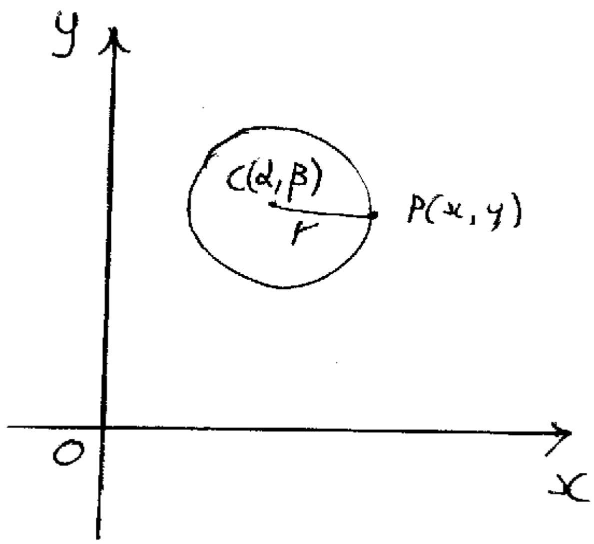

Figura 1

In simboli:

$$\boxed{\gamma = \{P(x,y) : \overline{PC} = r\}} \tag{1.1}$$

.

Ricordiamo che dati 2 punti A e B, cui conosciamo le coordinate

$$A(x_A, y_A)$$

$$B(x_B, y_B)$$

é semplice calcolare la loro distanza:

$$\overline{AB} = \sqrt{\underbrace{(x_B - x_A)^2}_{differenza-ascisse} + \underbrace{(y_B - y_A)^2}_{differenza-ordinate}} \quad (1.2)$$

Applichiamo la formula (1.2) al nostro caso e calcoliamo la distanza tra $P(x, y)$ e $C(\alpha, \beta)$.

$$\overline{PC} = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = r \tag{1.3}$$

eleviamo al quadrato

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \tag{1.4}$$

sviluppiamo i due quadrati di binomio

$$x^2 + \alpha^2 - 2\alpha\, x + y^2 + \beta^2 - 2\beta\, y = r^2 \tag{1.5}$$

$$x^2 + \alpha^2 - 2\alpha\, x + y^2 + \beta^2 - 2\beta\, y - r^2 = 0$$

Riordiniamo secondo l'ordine: $x^2, y^2, x, y, termine\ noto$

$$x^2 + y^2 - 2\alpha\, x - 2\beta\, y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0 \tag{1.6}$$

poniamo:

$$\begin{cases} -2\alpha = a \\ -2\beta = b \\ \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = c \end{cases} \tag{1.7}$$

La (1.6) diviene:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \tag{1.8}$$

Tale equazione rappresenta l'equazione della circonferenza in forma canonica.

Osservazione (1):

L'equazione della circonferenza (1.8) ha alcune particolaritá:

- I coefficienti della x^2 e della y^2 hanno lo stesso valore, quindi si puó sempre ipotizzare che valgano 1, se cosí non fosse, si puó sempre dividere l'equazione per l'uguale coefficiente della x^2 e della y^2. Cosí facendo i coefficienti della x^2 e y^2 si possono sempre ricondurre a 1.

Esempio: Se abbiamo l'equazione

$$4x^2 + 4y^2 + 3x - 2y - 7 = 0 \tag{1.9}$$

la dividiamo per 4

$$x^2 + y^2 + \frac{3}{4}x - \frac{2}{4}y - \frac{7}{4} = 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y - \frac{7}{4} = 0$$

- Manca il *termine misto* in $x\,y$

2. Grafico della circonferenza γ nota l'equazione:

Supponiamo di conoscere l'equazione di una circonferenza γ:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \tag{2.1}$$

vediamo come si procede per tracciare il suo grafico.
É evidente che per tracciare il grafico della circonferenza, é necessario conoscere le coordinate del centro $C(\alpha, \beta)$ e la lunghezza del raggio r.
A tal fine occorre ricavare $\alpha\,\beta\;e\;r$ in funzione delle quantitá note a, b, c.

Partiamo dalle equazioni (1.7) :

$$\begin{cases} -2\alpha = a \\ -2\beta = b \\ \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = c \end{cases} \tag{2.2}$$

Ricaviamo $\alpha,\ \beta,\ r$ in funzione di a, b, c :

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{a}{2} \\ \beta = -\frac{b}{2} \\ r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c} \end{cases} \tag{2.3}$$

A questo punto é semplice tracciare il grafico dell'equazione, poiché conoscendo α e β, che sono l'ascissa e l'ordinata del centro, conosciamo la posizione di esso, e conoscendo anche la lunghezza del raggio r si traccia il grafico.

Osservazione:
I coefficienti a, b, c dell'equazione della circonferenza γ, contengono informazioni implicite di tipo geometrico, a contiene informazioni sull'ascissa del centro α; b sull'ordinata del centro β; c contiene informazioni su su α, β, e lunghezza del raggio r.

2.1. **ESEMPIO n^{o}1.** :
Tracciare il grafico della circonferenza γ di equazione:

$$x^2 + y^2 + 12x - 4y - 16 = 0 \tag{2.4}$$

in questo caso conosciamo i coefficienti

$$\begin{cases} a = 12 \\ b = -4 \\ c = -16 \end{cases} \tag{2.5}$$

dell'equazione (2.4).
Per tracciare il grafico ci serve conoscere α, β, r.

Tali valori li ricaviamo dalle equazioni (2.3)

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{a}{2} \\ \beta = -\frac{b}{2} \\ r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c} \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{12}{2} = -6 \\ \beta = -\frac{-4}{2} = 2 \\ r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - c} = \sqrt{36 + 4 + 16} = \sqrt{56} \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} \alpha = -6 \\ \beta = 2 \\ r = \sqrt{56} = \sqrt{2^3 \cdot 7} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 7} = 2\sqrt{14} \end{cases} \tag{2.8}$$

o in forma decimale

$$\begin{cases} \alpha = -6 \\ \beta = 2 \\ r = 7,48 \end{cases} \tag{2.9}$$

a questo punto é immediato tracciare il grafico.

3. Intersezione di una circonferenza γ con una retta r:

Sia γ una circonferenza e r una retta, supponiamo che $\gamma e r$ appartengano allo stesso piano π

Esse possono avere le seguenti 3 diverse disposizioni

- (**1**) la retta r é secante alla circonferenza γ
- (**2**) la retta r é tangente alla circonferenza γ
- (**3**)la retta r é esterna alla circonferenza γ

In tutti i casi, per capire come sono disposte, occorre studiare il sistema di 2^o grado nelle incognite x e y:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 & \text{equazione di } \gamma, \\ dx + ey + f = 0 & \text{equazione di } r. \end{cases} \tag{3.1}$$

con a, b, c, d, e, f coefficienti $\in \mathbb{R}$.

Qualche consiglio utile per risolvere il sistema

- esprimere x in funzione di y partendo dall'equazione lineare, cioé dall'equazione della retta;
- sostituire tale quantitá nell'equazione di secondo grado in due variabili. Fatto questo si otterrá un'equazione di secondo grado in una sola variabile x o y;
- risolvere l'equazione di secondo grado dove il valore di Δ ha un'importante significato geometrico.

Infatti se

$$\begin{cases} \Delta > 0 & \text{la retta } r \text{ é secante alla circonferenza } \gamma \\ \Delta < 0 & r \text{ é esterna a } \gamma \\ \Delta = 0 & r \text{ é tangente a } \gamma \end{cases} \tag{3.2}$$

3.1. **Esempio:intersezione circonferenza-retta.** Data la circonferenza γ di equazione

$$x^2 + y^2 - 4x + 9y - 3 = 0 \tag{3.3}$$

e la retta r di equazione

$$2x - 3y + 1 = 0 \tag{3.4}$$

studiare la loro intersezione.

Per studiare l'intersezione occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 9y - 3 = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

esplicitiamo dall'equazione della retta la variabile x

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 9y - 3 = 0 \\ 2x = 3y - 1 \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 9y - 3 = 0 \\ x = \frac{3y-1}{2} \end{cases} \tag{3.7}$$

sostituiamo la x nell'equazione di secondo grado della circonferenza

$$\begin{cases} (\frac{3y-1}{2})^2 + y^2 - 4(\frac{3y-1}{2}) + 9y - 3 = 0 \\ x = \frac{3y-1}{2} \end{cases} \tag{3.8}$$

sviluppiamo i quadrati

$$\begin{cases} (\frac{9y^2+6y+1}{4}) + y^2 - 4(\frac{3y-1}{2}) + 9y - 3 = 0 \\ x = \frac{3y-1}{2} \end{cases} \tag{3.9}$$

sviluppiamo i prodotti

$$\begin{cases} \frac{9y^2+6y+1}{4} + y^2 - \frac{12y-4}{2} + 9y - 3 = 0 \\ -\,-\,-\,-\,- \end{cases} \tag{3.10}$$

calcoliamo il *m.c.m.*

$$\begin{cases} \frac{9y^2+6y+1+4y^2-24y+8+36y-12}{4} = \frac{0}{4} \\ -\,-\,-\,-\,- \end{cases} \tag{3.11}$$

visto che i denominatori di ambo i membri sono uguali li possiamo eliminare

$$\begin{cases} 9y^2 + 6y + 1 + 4y^2 - 24y + 8 + 36y - 12 = 0 \\ -\,-\,-\,-\,- \end{cases} \tag{3.12}$$

raccogliamo a fattor comune secondo l'ordine $y^2, y,$ *termine noto*

$$\begin{cases} 13y^2 + 18y - 3 = 0 \quad \text{equazione di } 2^o \text{ grado completa;} \\ -\,-\,-\,-\,- \end{cases} \tag{3.13}$$

risolviamo l'equazione di 2^ogrado completa; essa ha coefficienti

$$a = 13;\ b = 18;\ c = -3$$

calcoliamo il discriminante Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac \tag{3.14}$$

$$\Delta = 18^2 - 4(13)(-3) \tag{3.15}$$

$$\Delta = 324 + 156 = 480 \tag{3.16}$$

calcoliamo le soluzioni dell'equazione

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{3.17}$$

$$y_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{480}}{26} \tag{3.18}$$

$$y_{1,2} = \frac{-18 \pm 21,91}{26} \tag{3.19}$$

separiamo le soluzioni

$$y_1 = \frac{-18 + 21,91}{26} = 0,15 \tag{3.20}$$

$$y_2 = \frac{-18 - 21,91}{26} = 1,53 \tag{3.21}$$

sostituiamo tali soluzioni (una per volta) nell'equazione lineare (di primo grado del sistema) precisamente nella (3.9)

$$x = \frac{3y - 1}{2} \tag{3.22}$$

chiamiamo x_1 l'ascissa che deriva dalla sostituzione di y_1, idem per la x_2

$$x_1 = \frac{3 \cdot 0,15}{2} = 0,22 \tag{3.23}$$

e

$$x_2 = \frac{3 \cdot 1,53}{2} = 2,30 \tag{3.24}$$

concludiamo affermando che la retta é secante alla circonferenza e la interseca nei punti

$$A(x_1; y_1) \quad B(x_2; y_2) \tag{3.25}$$

$$A(0,22;0,15) \quad B(2,30;1,53) \tag{3.26}$$