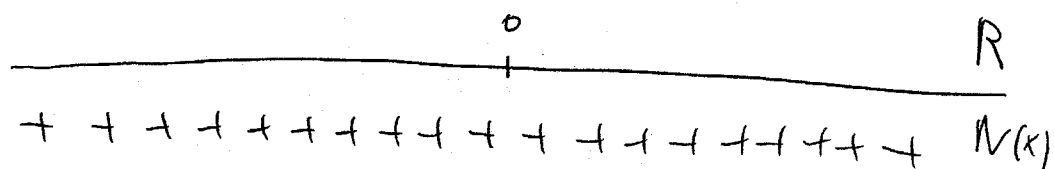


$$1) \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} \leq 0 \quad (1)$$

Studiamo $N(x) \geq 0$

$$x^2 - 3x + 5 \geq 0 \quad \Delta = 9 - 4(1)(5) = 9 - 20 = -11$$

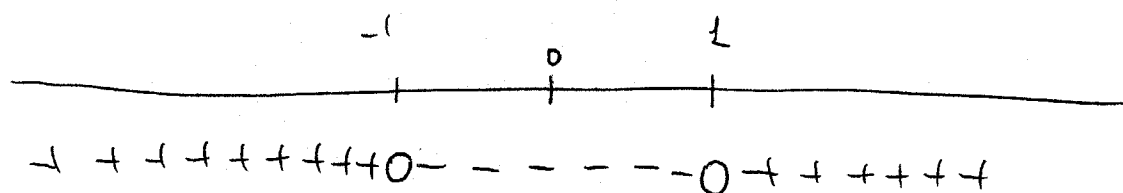
famiglia ≥ 0 e $\Delta < 0 \Rightarrow$ verificata $\forall x$, cioè
sempre +



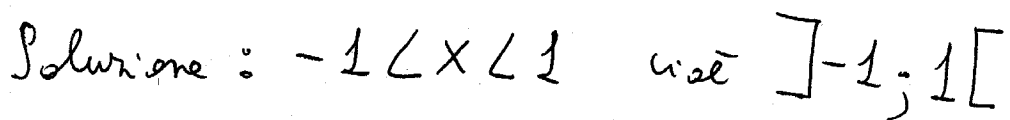
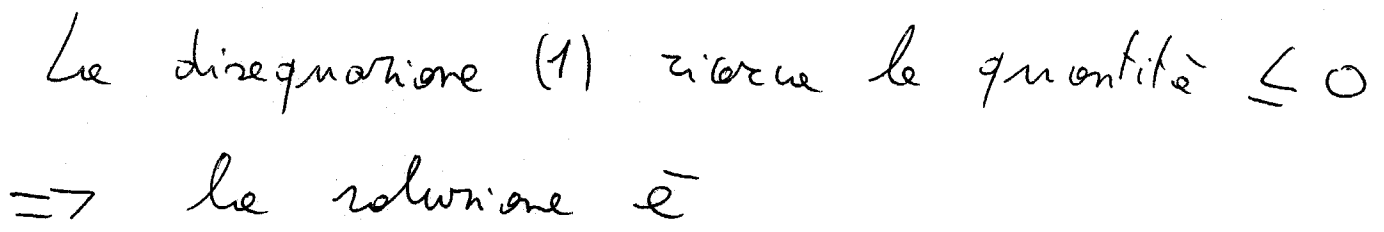
Studiamo $D(x)$

$$x^2 - 1 > 0 \quad \Delta = 0 - 4(1)(-1) = 4 > 0$$

famiglia > 0 $\Delta > 0 \Rightarrow$ soluzioni + all'esterno
e - all'interno. Radici $x^2 - 1 = 0$, $x^2 = 1$, $x = \pm 1$



②



2)

Esercizio

3

$$\frac{-x^2 + 4x}{9x^2 + 6x + 1} \geq 0 \quad (1)$$

Studiamo $N(x) \geq 0 \quad -x^2 + 4x \geq 0 \quad (2)$

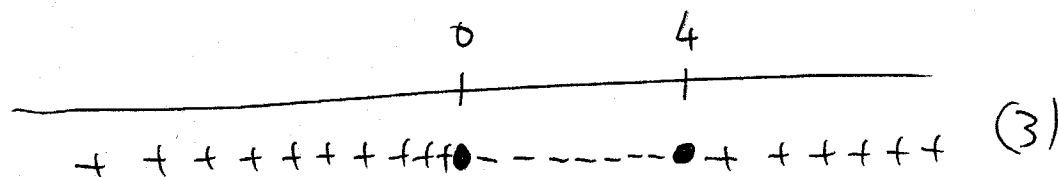
moltiplichiamo la (2) per (-1) ricordandoci
~~che~~ che necessariamente si deve moltiplicare
 per (-1) il grafico.

$$x^2 - 4x \leq 0 \quad (3)$$

$$\Delta = 16 > 0$$

l'omiglia ≤ 0 , $\Delta > 0 \Rightarrow$ soluzioni negative
 all'interno. Radici: $x^2 - 4x = 0$; $x(x-4) = 0$; $x=0$ $x-4=0$
 $x=4$

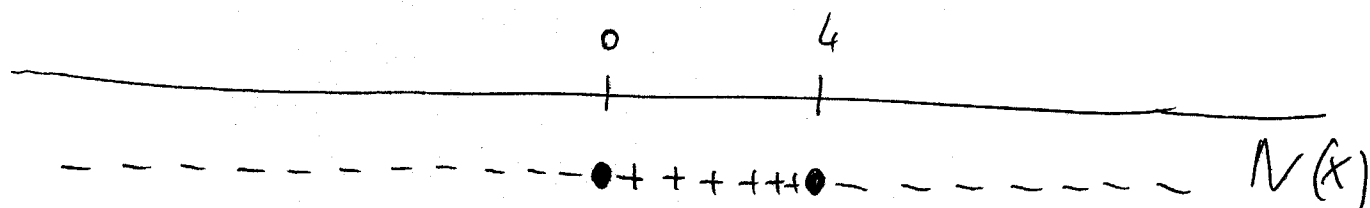
Grafico di (3)



Ma le (3) non è $N(x) > 0$ ma è le modificate.

(4)

Per avere lo studio di $N(x)$ dobbiamo moltiplicare il grafico di (3).



Studiamo $D(x) > 0$

$$9x^2 + 6x + 1 > 0 \quad \Delta = 36 - 4(9)(1) = 0$$

famiglie > 0 , $\Delta = 0 \Rightarrow$ tutto + escludendo
le radici dell'equazione

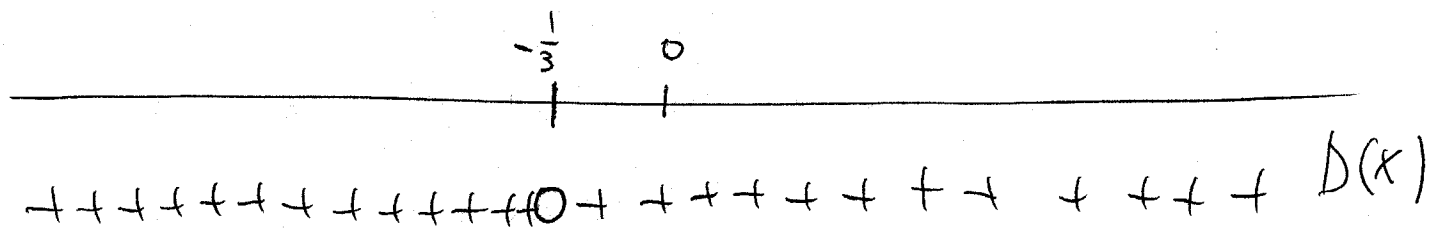
$$9x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm 0}{18} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$$

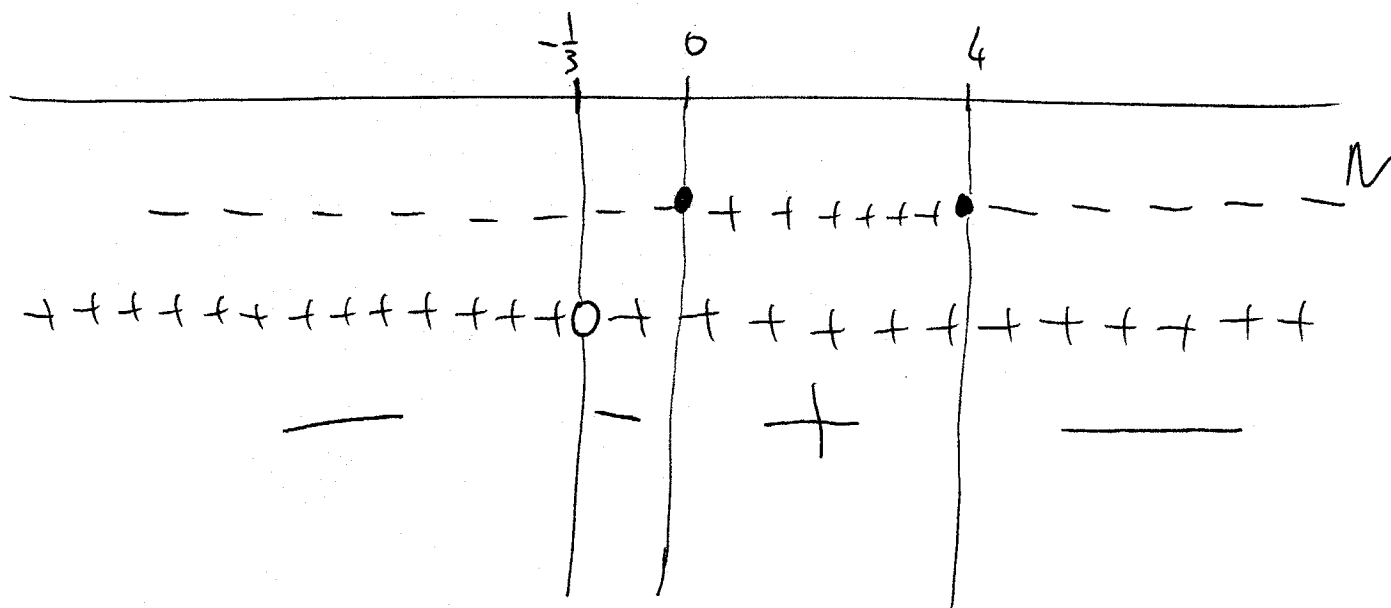
N.B.: per $x = -\frac{1}{3} \Rightarrow D(x)$ si annulla cioè
 $D(x) = 0$, ma se $D(x) = 0$, il valore delle
frontiere è ∞ , quindi $x = -\frac{1}{3}$ è da escludere.

Studio di $D(x)$

5



Studiamo $\frac{N}{D}$



•+++++•

Soluzione

•————•

Soluzione

$x \in [0, 4]$ cioè $0 \leq x \leq 4$.

Esercizio

$$\sqrt{3x^2 - x - 4} > x - 1$$

Queste famiglie si sviluppa con la seguente procedura

$$\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$$

$$\begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^{n-\text{pari}} \end{cases}$$

Nel nostro caso

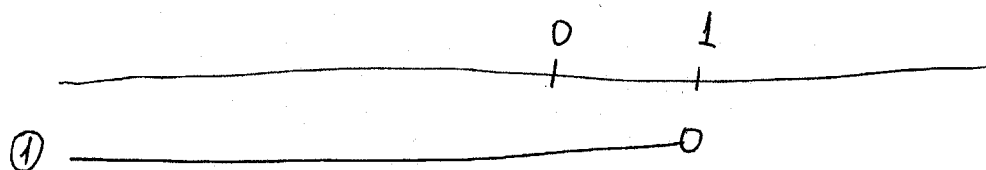
$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} \begin{cases} x - 1 < 0 \\ 3x^2 - x - 4 \geq 0 \end{cases} & \cup \quad \textcircled{3} \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 3x^2 - x - 4 > [x - 1]^2 \end{cases} \end{array}$$

Visto che si tratta di sistemi si grafica si tracciano in linea continua.

Studiamo le ①

⑦

$$x-1 < 0 ; x < 1$$

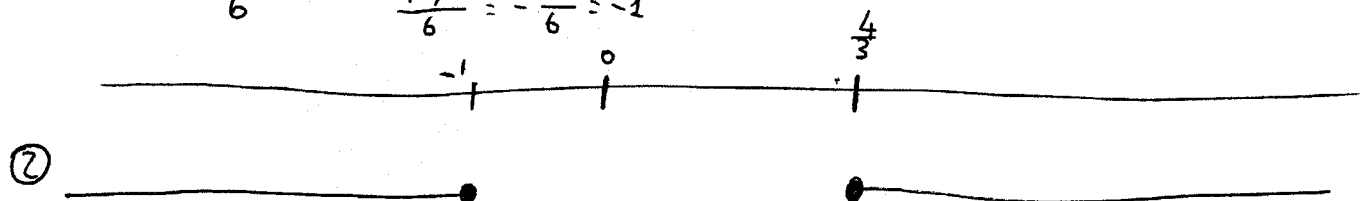


Studiamo le ②

$$3x^2 - x - 4 \geq 0 ; \Delta = 1 - 4(3)(-4) = 1 + 48 = 49 > 0$$

discriminante ≥ 0 e $\Delta > 0$ soluzioni esterne

$$x = \frac{1 \pm 7}{6} = \begin{cases} \frac{1+7}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ \frac{1-7}{6} = -\frac{6}{6} = -1 \end{cases}$$



La soluzione del primo sistema è ① $\cap$ ② $= S_1$

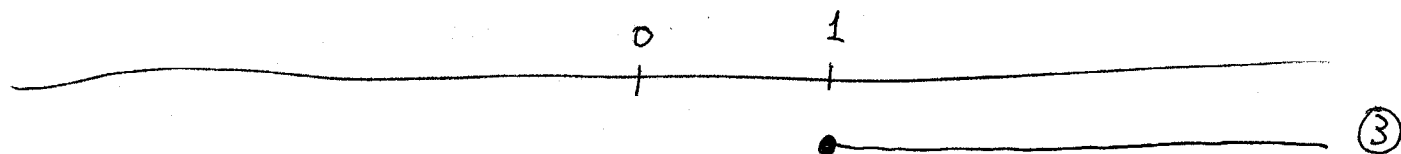
S_1

$$S_1 : -\infty < x \leq -1$$

Studiamo la ③

P. ⑧

$$x - 1 \geq 0 ; x \geq 1$$



Studiamo la ④

$$3x^2 - x - 4 > (x - 1)^2 ; 3x^2 - x - 4 > x^2 + 1 - 2x ;$$

$$3x^2 - x - 4 - x^2 - 1 + 2x > 0 ; 2x^2 + x - 5 > 0$$

$$\Delta = 1 - 4(2)(-5) = 1 + 40 = 41$$

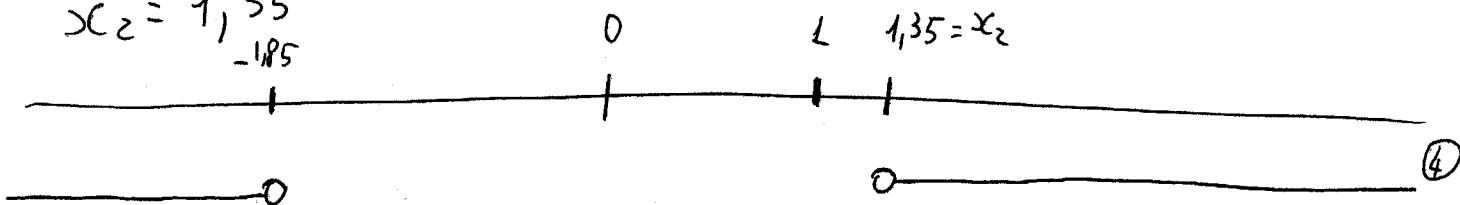
famiglie > 0 e $\Delta > 0 \Rightarrow$ soluzioni esterne

$$\text{Radici di } 2x^2 + x - 5 = 0 ; x = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{4} = \begin{cases} \frac{-1 - \sqrt{41}}{4} x_1 \\ \frac{-1 + \sqrt{41}}{4} x_2 \end{cases}$$

Calcoliamo i decimali di x_1 e x_2 per posizionarli graficamente

$$x_1 = -1,85$$

$$x_2 = 1,35$$

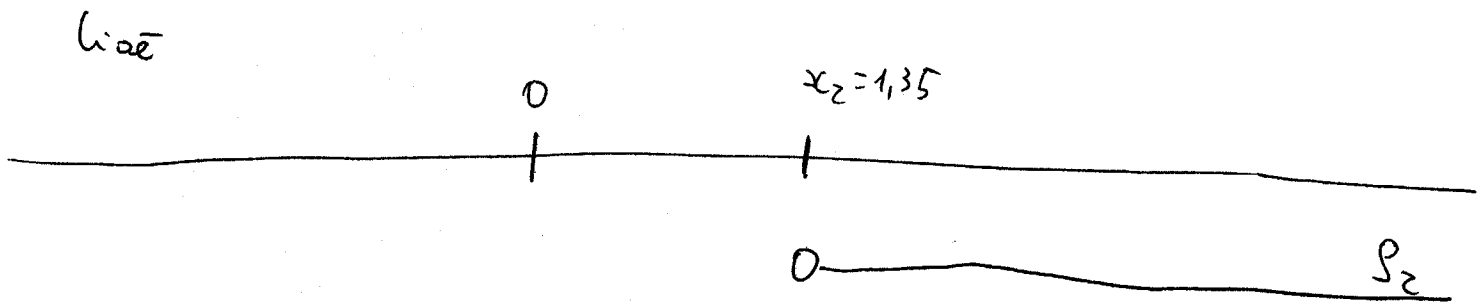


(9)

Avendo scritto separatamente i grafici di ③ e di ④ con lo 0 allineato determiniamo l'intersezione, che è la soluzione del secondo sistema

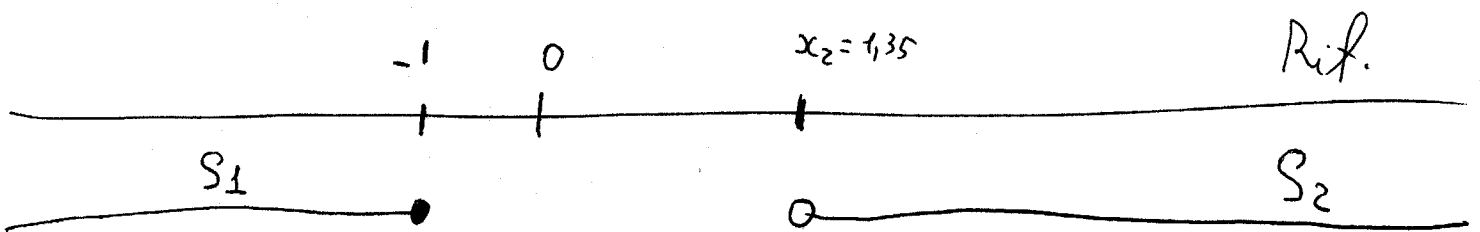
$$S_2 = ③ \cap ④ : x > x_2 \quad \text{cioè}$$

$$x > \frac{-1 + \sqrt{41}}{4}$$



Per completare lo svolgimento dobbiamo calcolare

$$S_1 \cup S_2$$



$$S_1 \cup S_2 :]-\infty, -1] \cup \left] \frac{-1 + \sqrt{41}}{4} ; +\infty \right[$$

Esercizio

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{x} < \sqrt{x+2} \quad (1)$$

Per prima cosa si deve sempre calcolare il campo di esistenza C.E.

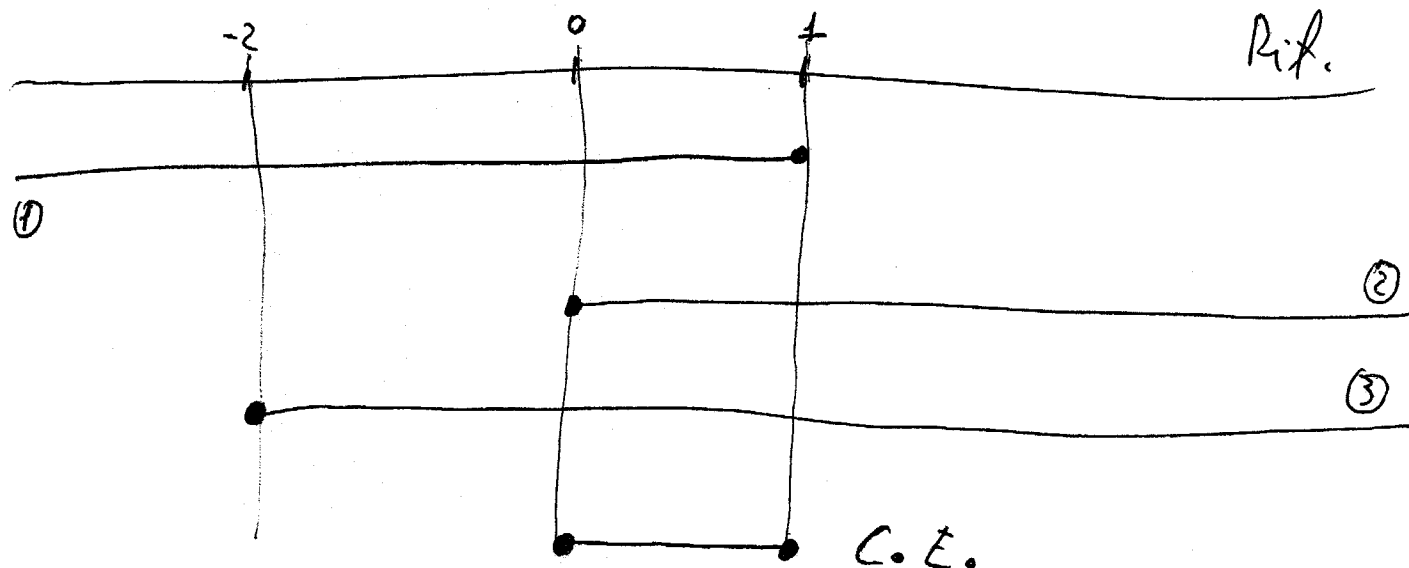
$$\text{C.E.} \quad \begin{cases} 1-x \geq 0 & (1) \\ x \geq 0 & (2) \\ x+2 \geq 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \quad 1-x \geq 0; \quad 1 \geq x$$

$$(2) \quad x \geq 0$$

$$(3) \quad x+2 \geq 0; \quad x \geq -2$$

Calcoliamo l'intersezione $(1) \cap (2) \cap (3) = \text{C.E.}$



C.E.: $0 \leq x \leq 1$ cioè $[0; 1]$

(11)

Torniamo alla disuguaglianza (1), se questa ha soluzione, la soluzione trovata ha dobbiamo interseccare con C.E. Tale intersezione sarà la soluzione generale di (1).

Eleviamo la (1) al quadrato

$$1 - \cancel{x} + \cancel{x} + 2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x} < x + 2$$

$$1 + 2\sqrt{(1-x) \cdot x} < x + 2$$

$$2\sqrt{x - x^2} < x + 2 - 1$$

$$2\sqrt{x - x^2} < x + 1$$

$$\sqrt{x - x^2} < \frac{x + 1}{2}$$

$$\sqrt{-x^2 + x} < \frac{x + 1}{2} \quad (4)$$

Siamo finalmente all'interno di una delle 4 famiglie dimostrate:

$$\sqrt[n\text{-pari}]{A(x)} < B(x)$$

equivalente a studiare

$$\begin{cases} B(x) > 0 \\ A(x) \geq 0 \\ A(x) < [B(x)]^{n\text{-pari}} \end{cases}$$

nel nostro caso:

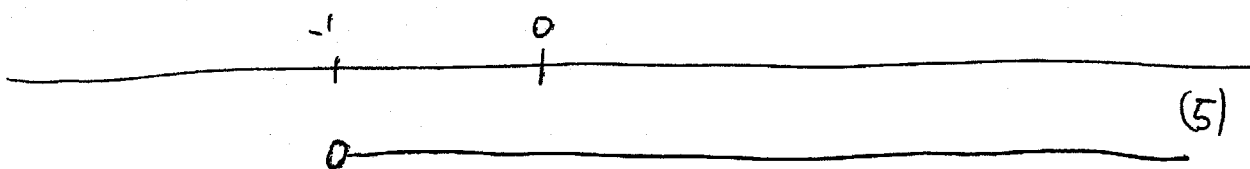
$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} > 0 & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2 + x \geq 0 & (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2 + x < \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 & (7) \end{cases}$$

Studiamo le (5)

$$\frac{x+1}{2} > 0; \quad x+1 > 0; \quad x > -1$$



(5)

Studiamo le (6)

$$-x^2 + x > 0$$

Al fine di poterlo studiare con lo sviluppo delle famiglie note dobbiamo modificare le (6) moltiplicandola per (-1) , ma tale disuguaglianza modificata non è equivalente alle (6) ma dobbiamo moltiplicare il suo grafico per (-1) al fine di avere il grafico reale della disuguaglianza (6)

$$(8) \quad x^2 - x \leq 0$$

(14)

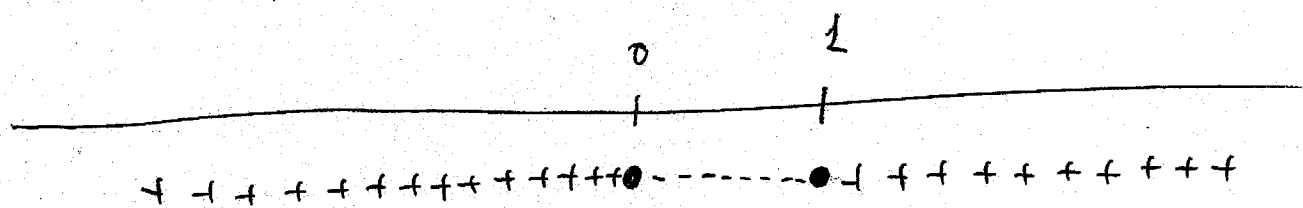
Calcoliamo il $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(0) = 1 > 0$

famiglie ≤ 0 e $\Delta > 0 \Rightarrow$ soluzioni negative all'intorno e positive all'esterno.

Radici di $x^2 - x = 0$; $x(x-1) = 0$;

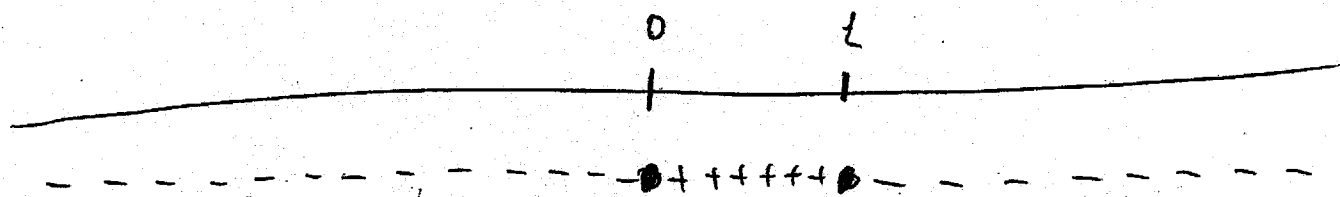
$x=0$; $x-1=0$; $x=1$

Grafico della (8)

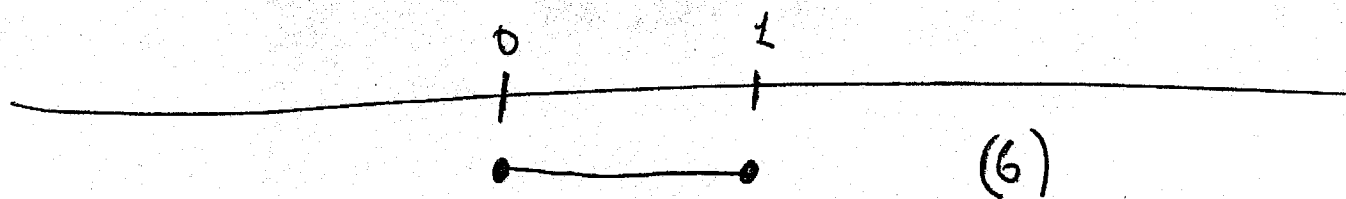


Per ottenere il grafico della (6) si deve moltiplicare per (-1) .

Grafico della (6)



Visto che la (6) è inserita in un sistema dobbiamo esprimere le sue soluzioni positive mediante linea continua.



Studiamo la (7) del sistema

$$-x^2 + x < \left(\frac{1+x}{2} \right)^2$$

$$-x^2 + x < \frac{1+x^2+2x}{4}$$

$$-x^2 + x - \frac{1+x^2+2x}{4} < 0$$

$$\frac{-4x^2 + 4x - 1 - x^2 - 2x}{4} < \frac{0}{4}$$

$$-4x^2 + 4x - 1 - x^2 - 2x < 0$$

$$-5x^2 + 2x - 1 < 0 \quad (8)$$

La disuguaglianza (7) del sistema equivale alla disuguaglianza (8).

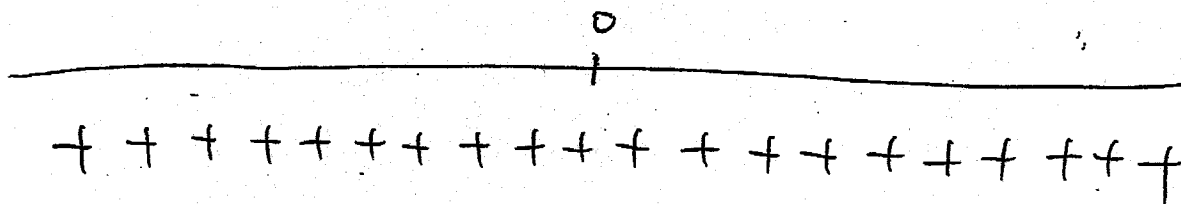
Al fine di studiare la (8)
 moltiplichiamo per (-1) , ricordando di
 moltiplicare per (-1) la soluzione.

$$5x^2 - 2x + 1 > 0 \quad (9)$$

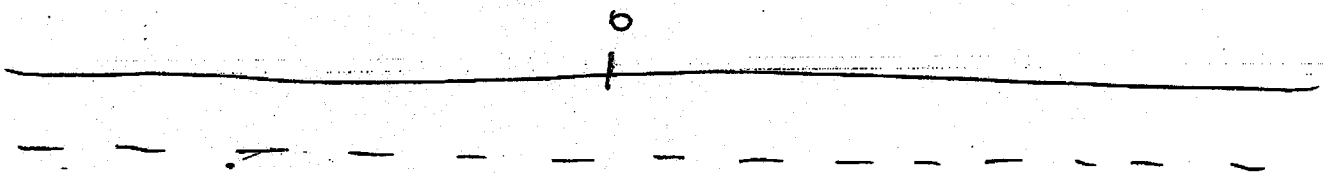
$$\Delta = 4 - 4(5)(1) = 4 - 20 = -16 < 0$$

poiché > 0 e $\Delta < 0 \Rightarrow$ tutte
 soluzioni +

Grafico della (9)

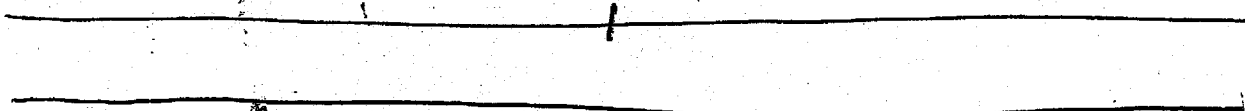


Quindi il grafico della (8) con i segni
 espliciti è

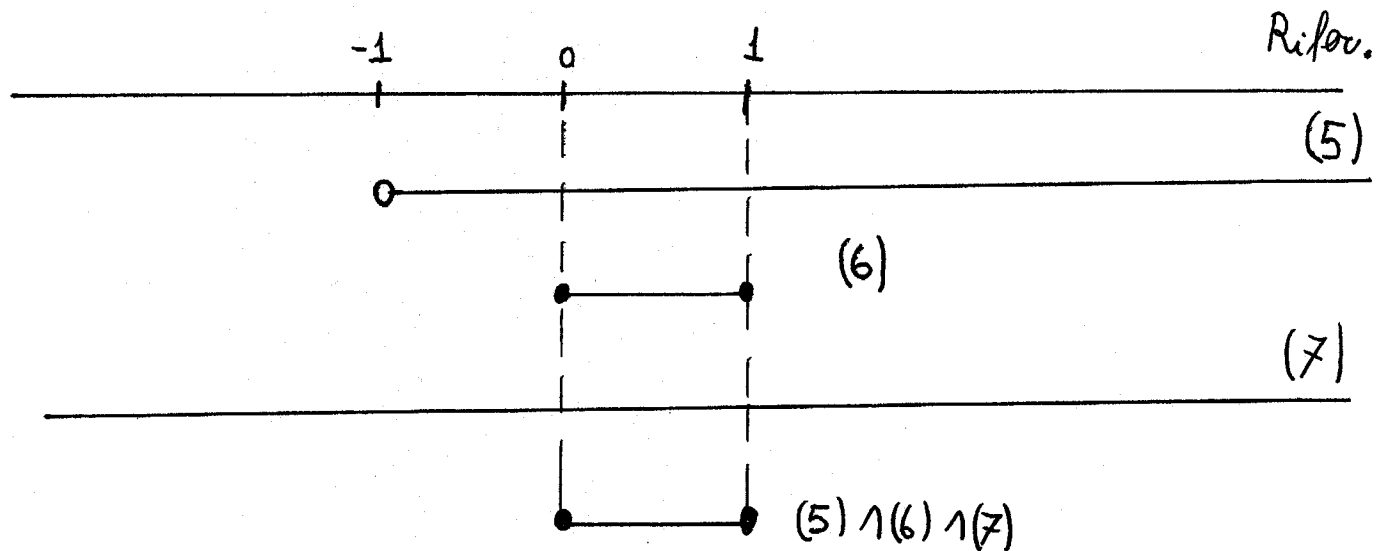


Ma visto che la (8) è inserita in un sistema esprimiamo
 le soluzioni mediante linea continua

Grafico di (8) che è la (7)
 del sistema



Calcoliamo l'intersezione delle
disuguaglianze in soluzione mediante linea
continua: $(5) \cap (6) \cap (7)$

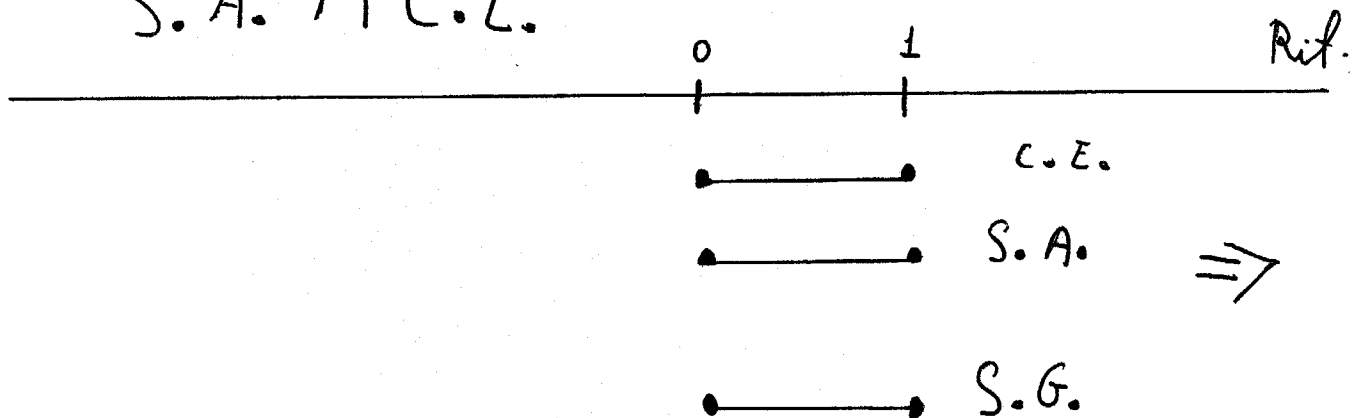


Soluzione Analitica delle disuguaglianze

$$S.A. = (5) \cap (6) \cap (7) = [0; 1] \text{ cioè } 0 \leq x \leq 1$$

La soluzione generale delle disuguaglianze è

$$S.A. \cap C.E.$$



La soluzione generale della disuguaglianza (1) è
 $[0; 1]$ cioè $0 \leq x \leq 1$

Esercizio

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = 2x + 3 \quad (1)$$

appartiene alla ben nota famiglia

$$\sqrt[n-\text{pari}]{} A(x) = B(x) \quad (2)$$

equivalente al sistema

$$(3) \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^{n-\text{pari}} \end{cases}$$

oppure all'altro equivalente sistema

$$(4) \quad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^{n-\text{pari}} \end{cases}$$

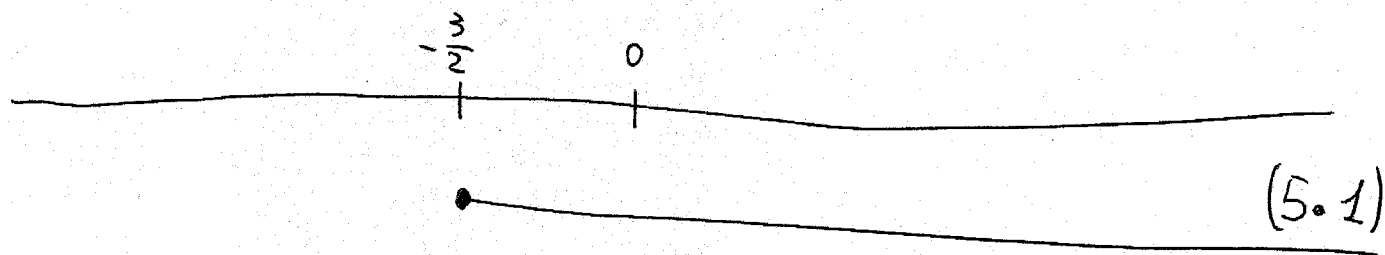
Applichiamo il sistema (4)

$$(5) \quad \begin{cases} 2x + 3 \geq 0 \\ x^2 + x + 1 = (2x + 3)^2 \end{cases}$$

Studiamo la (5.1)

(19)

$$2x+3 \geq 0 ; 2x \geq -3 ; x \geq -\frac{3}{2}$$



Studiamo la (5.2)

$$x^2+x+1=(2x+3)^2 ; x^2+x+1=4x^2+9+12x ;$$

$$x^2+x+1-4x^2-9-12x=0 ; -3x^2-11x-8=0$$

$$3x^2+11x+8=0 ; \Delta=(11)^2-4(3)(8)=121-96=25$$

$$x = \frac{-11 \pm 5}{6} = \begin{cases} \frac{-11-5}{6} = -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3} \\ \frac{-11+5}{6} = -\frac{6}{6} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{8}{3} = -2,667$$

$$x_2 = -1$$

$x_1 \notin \text{grafico (5.1)}$ quindi non è soluzione

$x_2 = -1 \in \text{grafico (5.1)} \Rightarrow \bar{e}$ soluzione

$$\sqrt{x+4} - 2x < -5 \quad (1)$$

$$\sqrt{x+4} < 2x-5 \quad (2)$$

Le disequazione (2) appartiene alle famiglie ^{n-pari}

$$\sqrt{A(x)} < B(x) \quad (3)$$

equivalente al sistema:

$$(4) \quad \begin{cases} B(x) > 0 \\ A(x) \geq 0 \\ A(x) < [B(x)]^{n\text{-pari}} \end{cases}$$

Studiamo il nostro caso

$$(5) \quad \begin{cases} 2x-5 > 0 \\ x+4 \geq 0 \\ x+4 < (2x-5)^2 \end{cases}$$

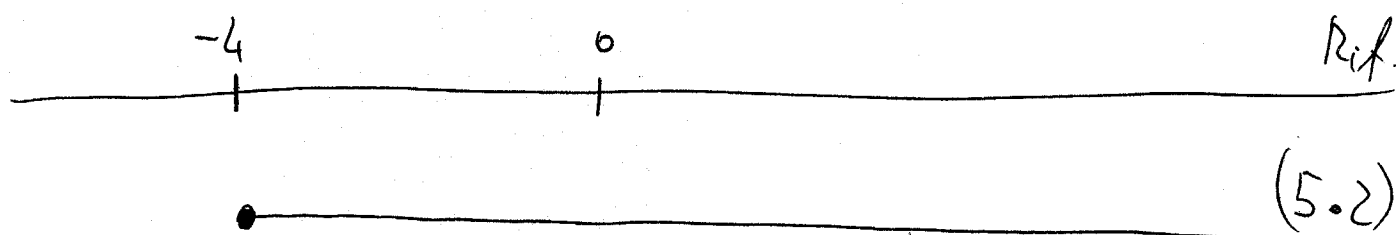
Studiamo le (5.1)

(21)

$$2x - 5 > 0; 2x > 5; x > \frac{5}{2}$$



Studiamo le (5.2) $x + 4 > 0; x > -4$



Studiamo le (5.3) $x + 4 < 4x^2 + 25 - 20x;$

$$x + 4 - 4x^2 - 25 + 20x < 0; -4x^2 + 21x - 21 < 0;$$

$$-4x^2 + 21x - 21 < 0 \quad (6)$$

Moltiplichiamo le (6) per (-1) e successivamente moltiplichiamo il grafico per (-1)

$$4x^2 - 21x + 21 > 0 \quad (7)$$

$$\Delta = (21)^2 - 4(4)(21) = 441 - 336 = 105$$

$$\begin{array}{r} 105 \overline{) 5} \\ 21 \overline{) 7} \\ 3 \overline{) 3} \\ 1 \end{array}$$

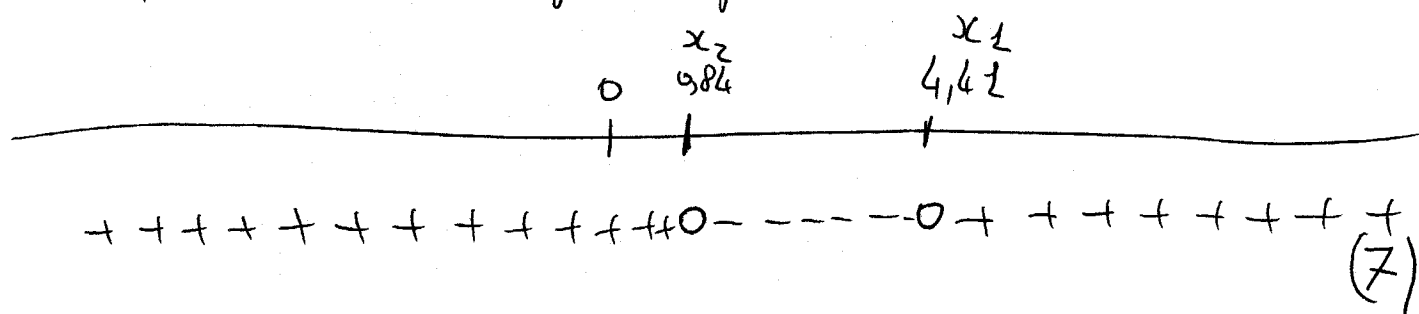
Studiamo l'equazione associata

(22)

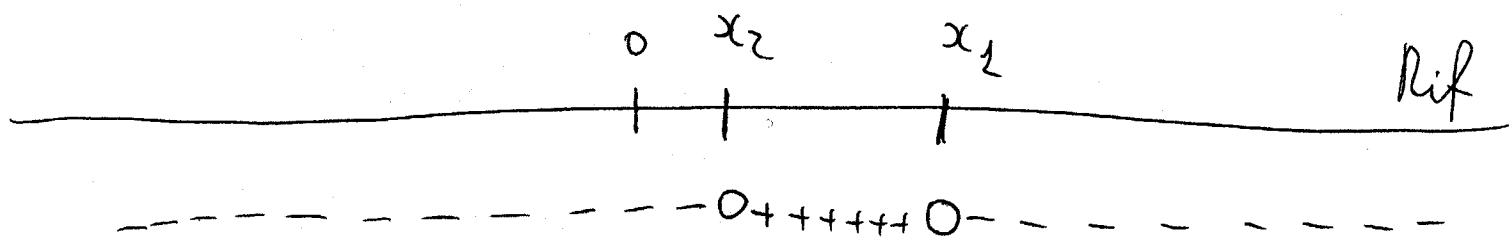
$$4x^2 - 21x + 22 = 0 \quad (8)$$

$$x = \frac{21 \pm \sqrt{105}}{8} = \begin{cases} \frac{21 + \sqrt{105}}{8} = 4,41 & x_1 \\ \frac{21 - \sqrt{105}}{8} = \text{0,84} & x_2 \end{cases}$$

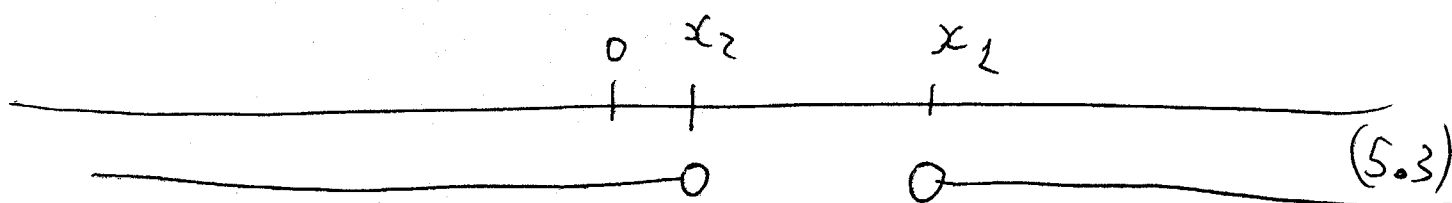
Grafico con i segni espliciti delle (7)



Moltiplicando per (-1) tale grafico otteniamo il grafico delle (6) che è quella che a noi interessa che è la (5.3)

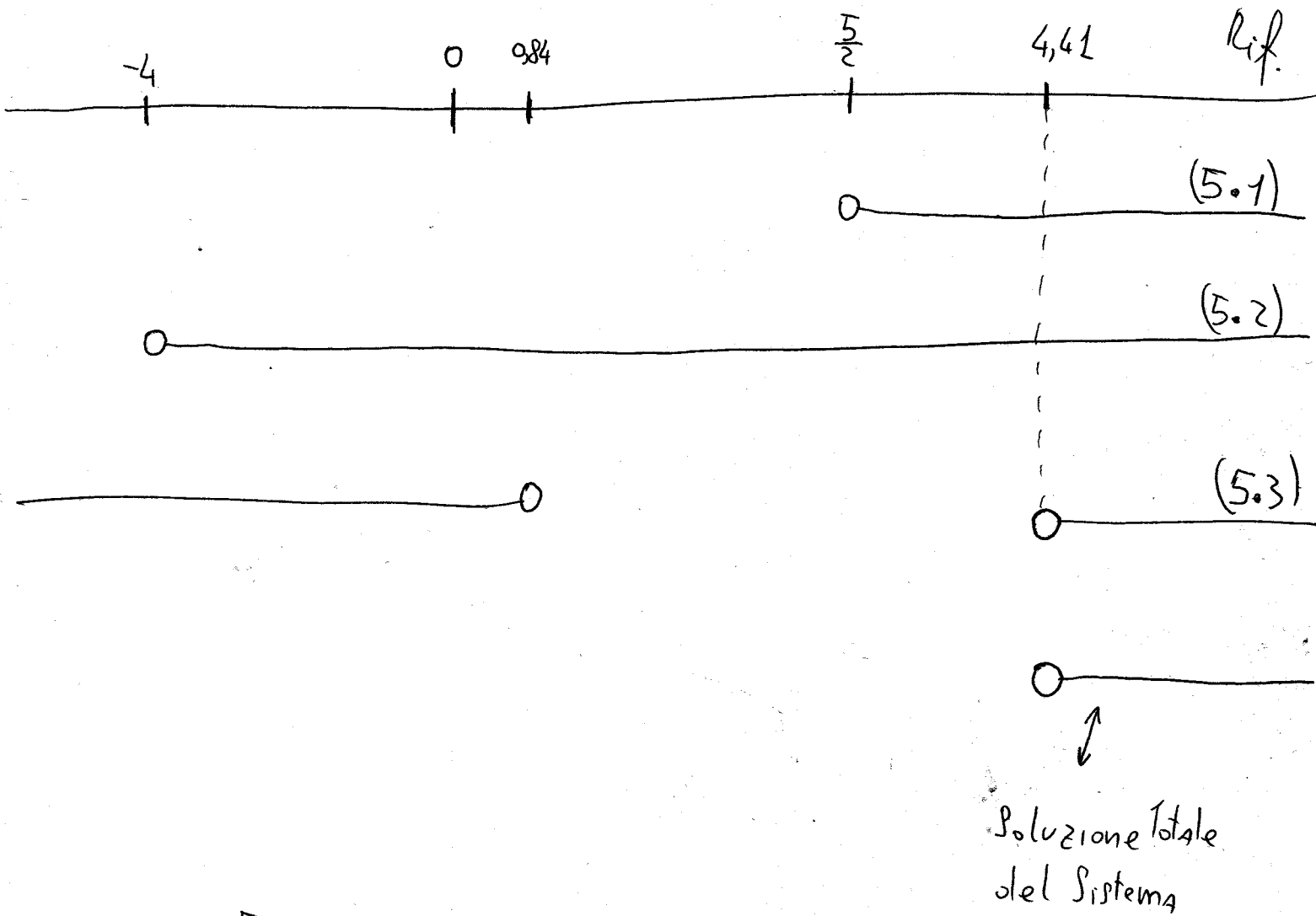


La (5.3) ricerca i valori negativi quindi il grafico in linea continua è



Per risolvere il sistema (5) calcoliamo
l'intervallazione

$$(5.1) \wedge (5.2) \wedge (5.3)$$



$$\frac{21 + \sqrt{105}}{8} < x < +\infty \quad \text{cioè}$$

$$\left[\frac{21 + \sqrt{105}}{8} ; +\infty \right[$$