

Disequazioni Esponenziali - esercizi

N 213

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x < \frac{27}{8} \quad ; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(\frac{3}{2}\right)^3 \quad \text{applichiamo } \log_{\frac{3}{2}} \text{ ad}$$

ambo i membri:

$$\log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^x < \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^3 \quad ; \quad x < 3$$

$$\begin{array}{c} \text{0} \qquad \qquad \text{3} \\ \hline \hline x \in]-\infty, 3[\end{array}$$

~

N 230

$$-4^x - 3 \cdot 2^x > 2^{2x} - 2^x$$

$$-(2^2)^x - 3 \cdot 2^x > (2^x)^2 - 2^x$$

$$-(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x > (2^x)^2 - 2^x$$

$$\text{poniamo } 2^x = t$$

$$-t^2 - 3t > t^2 - t \quad ; \quad -t^2 - 3t - t^2 + t > 0$$

$$-2t^2 - 2t > 0 \quad \text{moltiplichiamo per } (-1) \quad (a)$$

$$2t^2 + 2t < 0 \quad (b)$$

$$t(2t + 2) < 0$$

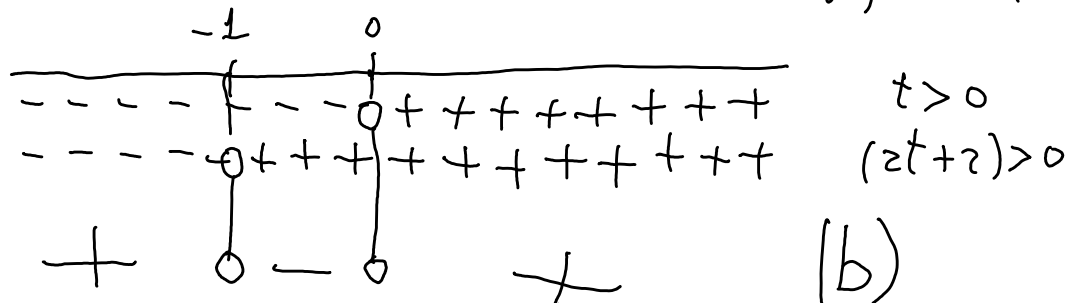
1° fattore > 0

$$t > 0$$

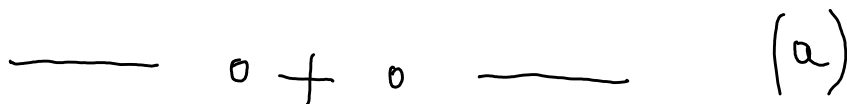
2° fattore > 0

$$(2t+2) > 0; \quad 2t > -2; \quad t > -1$$

segno di (b)



abbiamo moltiplicato una disequazione di grado pari, di grado 2, la (b) per (-1) , ma noi non cerchiamo il segno della (b), ma in segno della (a), per cui dobbiamo moltiplicare le soluzioni della (b) per (-1) per ottenere il segno della (a).



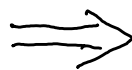
La (a) ricerca i valori positivi, quindi possiamo dire che le soluzioni della (a) sono :



ma $2^x = t \Rightarrow$ dobbiamo studiare gli estremi nelle variabili x

$2^x = -1$ impossibile

$2^x = 0$ impossibile



la disequazione della traccia non ha soluzioni, cioè la soluzione è l'insieme vuoto:

$$S = \emptyset$$

N238

$$4 \cdot 2^{3x} - 4^{x+2} < 0$$

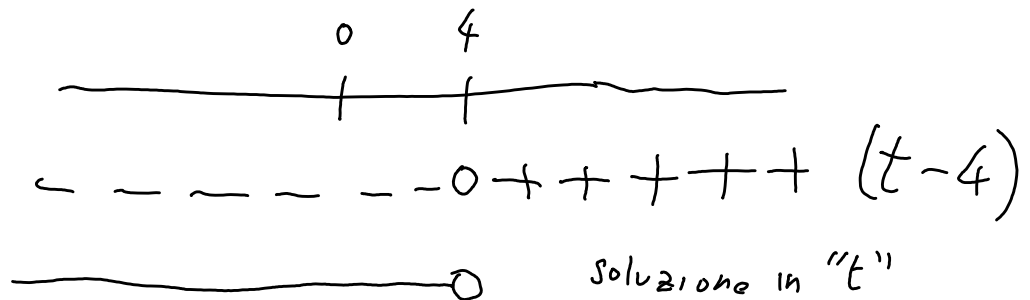
$$4 \cdot (2^x)^3 - 4^x \cdot 4^2 < 0 ; 4 \cdot (2^x)^3 - (2^x)^2 \cdot 4^2 < 0$$

$$(2^x)^3 - (2^x)^2 \cdot 4 < 0 \quad \text{poniamo } 2^x = t$$

$$t^3 - t^2 \cdot 4 < 0 ; t^2(t-4) < 0$$

$t^2 > 0$ sempre, quindi non serve studiare il segno essendo sempre positivo. Studiamo invece :

$$t-4 > 0, t > 4$$



$$\text{ma } 2^x = t ; 2^x = 4 ; 2^x = 2^2 ; x = 2$$

la soluzione è $x < 2$

$$\forall x \in]-\infty; 2[$$

~

N 248

$$\sqrt{2 \cdot 6^x + 7} \leq 6^x + 1$$

poniamo $6^x = t$

$$\sqrt{2 \cdot t + 7} \leq t + 1$$

siamo di fronte ad una disequazione irrazionale del tipo:

$$\sqrt{A(x)} \leq B(x)$$

che equivale a studiare il seguente sistema a 3 disequazioni:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \leq [B(x)]^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t + 7 \geq 0 & (a) \\ t + 1 \geq 0 & (b) \\ 2t + 7 \leq (t + 1)^2 & (c) \end{cases}$$

$$2t + 7 \geq 0 ; 2t \geq -7 ; t \geq -\frac{7}{2} \quad (a)$$

$$t + 1 \geq 0 ; t \geq -1 \quad (b)$$

$$2t + 7 \leq t^2 + 1 + 2t ; 7 \leq t^2 + 1 ; 7 - t^2 - 1 \leq 0 ; -t^2 + 6 \leq 0 \quad (c)$$

dobbiamo studiare la (c), ma per studiarla dobbiamo moltiplicare la (c) per (-1) al fine di avere il t^2 positivo

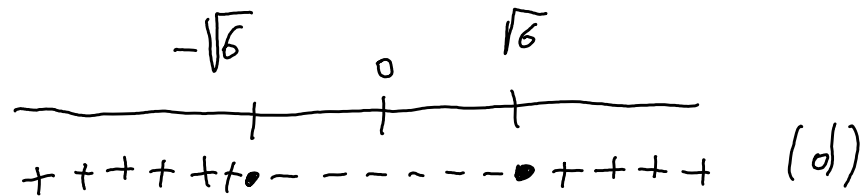
$$t^2 - 6 \geq 0 \quad (d)$$

studiamo la (d)

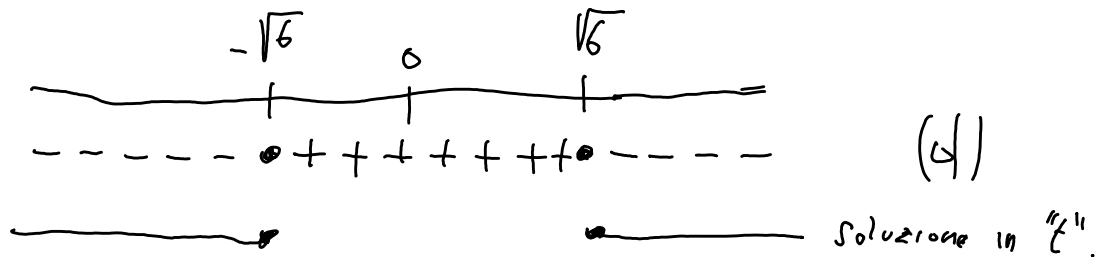
$$\Delta = 0 - 4(1)(-6) = 24 > 0$$

$$t = \frac{\pm \sqrt{24}}{2} = \frac{\pm \sqrt{3 \cdot 2^3}}{2} = \frac{\pm 2\sqrt{6}}{2} = \pm \sqrt{6}$$

$$t_1 = \sqrt{6} \quad \text{e} \quad t_2 = -\sqrt{6}$$



per ottenere il segno della (c) moltiplichiamo per (-1) il segno della (d).



abbiamo indicato mediante linea continua la parte negativa in quanto la (d) ricerca i numeri negativi.

esempio $6^x = t$ sostituiamo il valore degli estremi

$$6^x = -\sqrt{6}$$

tale equazione è impossibile in quanto la funzione esponenziale non assume mai valori negativi. Studiamo :

$$6^x = \sqrt{6} \quad ; \quad 6^x = 6^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad x = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$x \geq 2$$

cioè

$$x \in [2; +\infty[$$



N 783

$$13 \cdot 10^{2x-3} - 4 \cdot 7^{2x+1} < \frac{100^x}{1000} + 35 \cdot 7^{2x}$$

$$13 \cdot 10^{2x} \cdot 10^{-3} - 4 \cdot 7^{2x} \cdot 7 < (10^2)^x \cdot 10^{-3} + 35 \cdot 7^{2x}$$

$$13 \cdot 10^{2x} \cdot 10^{-3} - 10^{-3} \cdot 10^{2x} < 4 \cdot 7 \cdot 7^{2x} + 35 \cdot 7^{2x}$$

$$10^{2x} \cdot (13 \cdot 10^{-3} - 10^{-3}) < 7^{2x} (28 + 35)$$

$$10^{2x} \cdot [10^{-3} (13 - 1)] < 7^{2x} \cdot 63$$

$$10^{2x} \cdot 12 \cdot 10^{-3} < 63 \cdot 7^{2x}$$

applichiamo $\lg$ ad ambo i membri.

$$\lg_{10} (10^{2x} \cdot 12 \cdot 10^{-3}) < \lg_{10} (63 \cdot 7^{2x})$$

$$\lg_{10} 10^{2x} + \lg_{10} 12 + \lg_{10} 10^{-3} < \lg_{10} 63 + \lg_{10} 7^{2x}$$

$$2x + \lg_{10} 12 - 3 < \lg_{10} 63 + 2x \cdot \lg_{10} 7$$

$$2x - 2x \cdot \lg_{10} 7 < \lg_{10} 63 - \lg_{10} 12 + 3$$

$$x(2 - 2 \lg_{10} 7) < \lg_{10} 9 \cdot 7 - \lg_{10} (2^2 \cdot 3) + 3$$

$$x(2 - 2 \lg_{10} 7) < \lg_{10}(3^2 \cdot 7) - \left[2 \lg_{10}^2 + \lg_{10} 3 \right] + 3$$

$$x(2 - \lg_{10} 7) < 2 \lg_{10}^3 + \lg_{10} 7 - 2 \lg_{10}^2 - \lg_{10}^3 + 3$$

controlliamo adesso il segno del coefficiente della x, per sapere se è positivo o negativo:

$$(2 - \lg_{10} 7) = 2 - 0,845098 \approx 1,1549 > 0$$

dividiamo ambo i membri per il coefficiente della x:

$$x < \frac{2 \lg_{10}^3 + \lg_{10} 7 - 2 \lg_{10}^2 - \lg_{10}^3 + 3}{2 - \lg_{10} 7}$$

$$x < \frac{\lg_{10}^3 + \lg_{10} 7 - 2 \lg_{10}^2 + 3}{2 - \lg_{10} 7}$$

OK

per tracciare il grafico dobbiamo calcolare il valore decimale del secondo membro:

$$x < \frac{\lg_{10}(3 \cdot 7) - \lg_{10} 4 + \lg_{10} 10^3}{\lg_{10} 10^2 - \lg_{10} 7}$$

$$x < \frac{\lg_{10}(21 \cdot 1000) - \lg_{10} 4}{\lg_{10} \frac{100}{7}}$$

$$x < \frac{\lg_{10} \left(\frac{21000}{4} \right)}{\lg_{10} \frac{100}{7}} = \frac{3,72016}{1,1549} \approx 3,22$$

$$x < 3,22 ; \begin{array}{c} 0 \quad 3,22 \\ | \quad | \\ \hline 0 \end{array}$$

N 809

$$\frac{3^{2x+1} + 12}{9^{2x} - 2 \cdot 3^{2x} - 3} - \frac{9}{4 \cdot (9^x - 3)} \geq 0 \quad (1)$$

$$\frac{3^{2x} \cdot 3 + 12}{(3^2)^{2x} - 2 \cdot (3^x)^2 - 3} - \frac{9}{4 \cdot ((3^2)^x - 3)} \geq 0$$

$$\frac{(3^x)^2 \cdot 3 + 12}{(3^x)^4 - 2 \cdot (3^x)^2 - 3} - \frac{9}{4 \cdot [(3^x)^2 - 3]} \geq 0$$

poniamo $3^x = t$

$$\frac{3t^2 + 12}{t^4 - 2t^2 - 3} - \frac{9}{4 \cdot (t^2 - 3)} \geq 0 \quad (2)$$

componiamo $t^4 - 2t^2 - 3$

$$t^4 - 2t^2 - 3 = 0 ; \text{ poniamo } t^2 = u$$

$$u^2 - 2u - 3 = 0 ; \quad \Delta = 4 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16$$

$$u = \frac{2 \pm 4}{2} = \frac{2(1 \pm 2)}{2} = 1 \pm 2 = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

da cui

$$u^2 - 2u - 3 = (u - 3)(u + 1) =$$

per cui possiamo scrivere

$$= (t^2 - 3)(t^2 + 1)$$

Quindi

$$t^4 - 2t^2 - 3 = (t^2 - 3)(t^2 + 1) = (t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3})(t^2 + 1)$$

in vista di tali scomposizioni la (2) diviene .

$$\frac{3t^2 + 12}{(t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3})(t^2 + 1)} - \frac{9}{4 \cdot (t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3})} \geq 0 \quad (3)$$

$$\frac{4 \cdot (3t^2 + 12) - 9 \cdot (t^2 + 1)}{4 \cdot (t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3})(t^2 + 1)} \geq 0$$

$$\frac{12t^2 + 48 - 9t^2 - 9}{\sim} \geq 0$$

$$\frac{3t^2 + 39}{\sim} \geq 0$$

studiamo $N(x) \geq 0$

e $D(x) > 0$

$$3t^2 + 39 \geq 0$$

questa disequazione $N(x)$, è sempre positiva in quanto ogni addendo è positivo.

Studiamo $D(x) > 0$

$$4 \cdot (t - \sqrt{3}) \cdot (t + \sqrt{3}) \cdot (t^2 + 1) > 0$$

$$(t - \sqrt{3}) \cdot (t + \sqrt{3}) \cdot (t^2 + 1) > 0$$

$$(t^2 + 1) \text{ è sempre } > 0$$

$$\text{Studiamo } (t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3}) > 0$$

$$t - \sqrt{3} > 0, t > \sqrt{3}$$

$$t + \sqrt{3} > 0, t > -\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & -\sqrt{3} & & 0 & & \sqrt{3} \\ & & | & & | & & | \\ \hline & + & + & + & + & + & 0 & - & - & - & - & 0 & + & + & + & + & + \\ \hline & & & & & & 0 & & & & & 0 & & & & & \end{array} \quad (3)$$

$$\text{ma } 3^x = t$$

calcoliamo gli estremi espressi nelle variabili x

$$3^x = -\sqrt{3}$$

da scartare poichè la funzione esponenziale non può mai assumere valori negativi.

$$3^x = \sqrt{3} ; 3^x = 3^{\frac{1}{2}} ; \log_3 3^x = \log_3 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Per cui tutte le disuguaglianze (1) ha soluzione

$$x > \frac{1}{2}$$

$$x \in]\frac{1}{2}; +\infty[$$

$$x : \frac{1}{2} < x < +\infty$$