DISEQUAZIONE RAZIONALE FRATTA CON QUANTITÀ IRRAZIONALI (1)

$$\frac{2+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-4}-2x+3} \le 0$$

Iniziamo con l'analizzare il Campo di Esistenza

Condizioni
$$\begin{cases} (1)\ x^2-1 \geq 0 \\ (2)\ x^2-4 \geq 0 \\ (3)\ D(x) \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-4}-2x+3 \neq 0 \end{cases}$$

Ricordiamo che il C.E. è l'intersezione di tutte le Condizioni di Esistenza

Studiamo (1) $x^2-1 \geq 0$

$\Delta = b^2-4ac = 0-4(1)(-1) = 4$

Sappiamo che se la disequazione è ≥ 0 e Δ è >0

$\Rightarrow$ soluzioni positive all'esterno

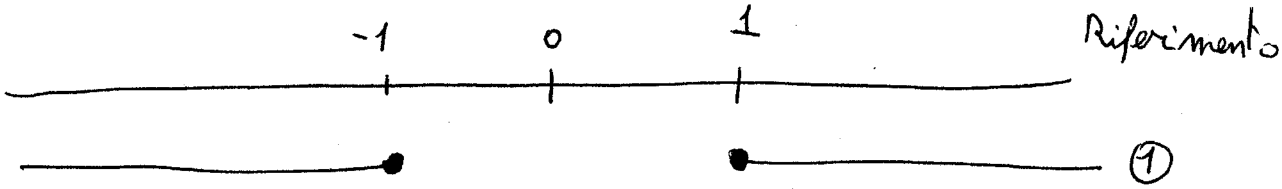
Troviamo le soluzioni dell'equazione associata di 1

$$x^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

$x^2 = 1$; $x = \pm\sqrt{1}$; $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$

Visto che le condizioni del C.E. si devono intersecare tra di loro e successivamente con le soluzione della disequazione razionale fratta esprimiamo le soluzioni in linea continua e non mediante i segni espliciti

Grafico di 1 :



Studiamo 2

$$x^2-4\geq 0$$

$$\Delta=b^2-4ac=0-4(1)(-4)=16 \Rightarrow$$

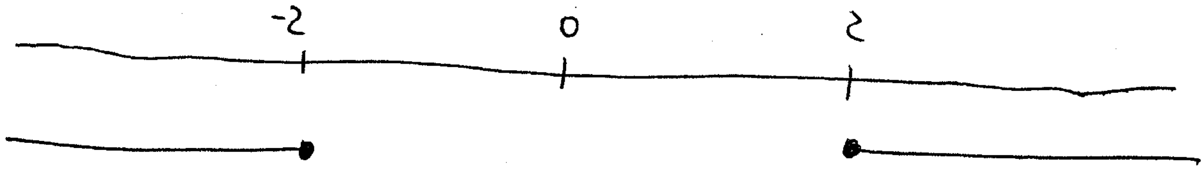
Soluzioni esterne.

Risolviamo l'equazione associata

$$x^2-4=0 \quad (4)$$

$x^2=4$; $x=\pm 2$; $x_3=2$ e $x_4=-2$

Grafico di 2



Studiamo la 3^a condizione di esistenza

$$D(x)\neq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-4}-2x+3\neq 0$$

Noi studieremo l'equazione $\sqrt{x^2-4}-2x+3=0$ 5

ed elimineremo le soluzioni dal Campo di Esistenza

Studiamo la 5

$$\sqrt{x^2-4} = 2x-3 \qquad (6)$$

dalla teoria sulle equazioni irrazionali sappiamo che

$$(7) \qquad \sqrt[2]{A(x)} = B(x)$$ equivale a studiare

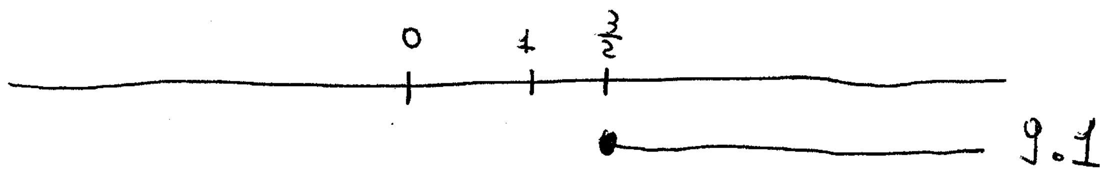
$$(8) \qquad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^2 \end{cases}$$

cioè

$$(9) \qquad \begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ x^2-4 = (2x-3)^2 \end{cases}$$

Studiamo la 9.1

$2x-3 \geq 0$; $2x \geq 3$; $x \geq \frac{3}{2}$



Studiamo la 9.2

(9.2) $x^2-4=(2x-3)^2$; $x^2-4=4x^2+9-12x$;

$x^2-4-4x^2-9+12x=0$; $-3x^2+12x-13=0$;

$(\times -1)$ un'equazione è equivalente:

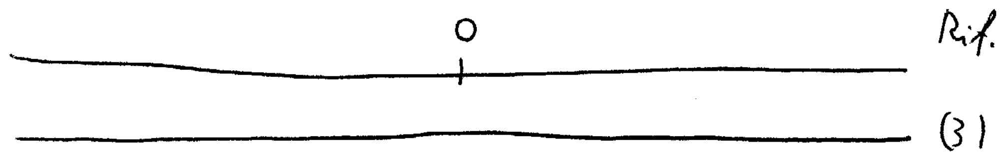
$$3x^2-12x+13=0 \qquad (9.2.1)$$

$\Delta = b^2-4ac = 144-4(3)(13) = 144-156 = -12$

Visto che $\Delta<0$ implica che la (9.2.1) non ha soluzioni Reali ($\mathbb{R}$)

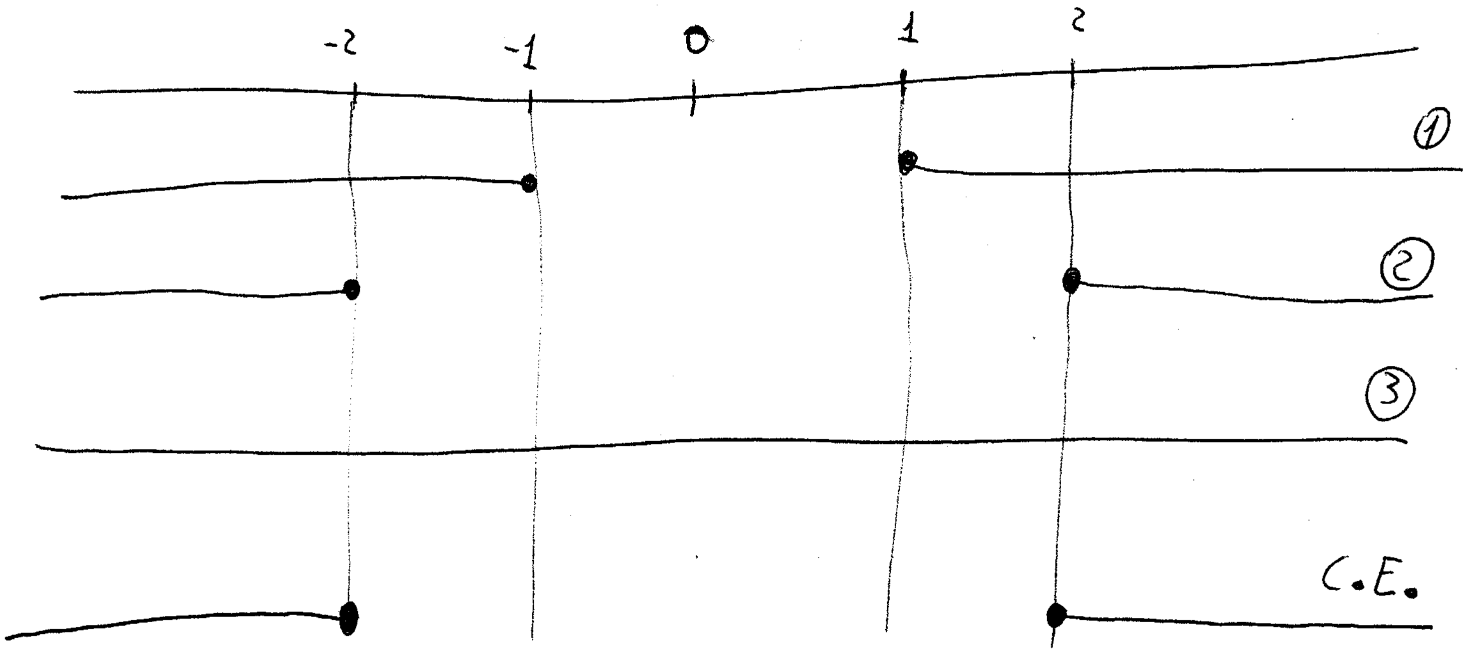
Di conseguenza il sistema (9) non ha soluzioni reali, da cui la (6) non ha soluzioni, per cui, concludiamo, che la (5) non ha soluzioni.

Se non esiste alcune $x \in \mathbb{R}$ tale da essere soluzione di (5) $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ è soluzione di (3) cioè $\forall x \in \mathbb{R}$ il denominatore $D(x): \sqrt{x^2-4}-2x+3$ è sempre $\neq 0$. Grafico di (3):



A questo punto risulta evidente che il Campo di Esistenza è dato da:

$$1 \wedge 2 \wedge 3 = C.E.$$



Da cui

$$C.E. = -\infty < x \le -2 \cup 2 \le x < +\infty$$

Studiamo adesso la disequazione razionale fratta.

Ricordiamo che nella disequazione razionale fratta, è importante lasciare i segni espliciti al fine di studiare il rapporto tra i segni.

$N(x) \geq 0$

$2+\sqrt{x^2-1} \geq 0$

$\sqrt{x^2-1} \geq -2$

Dalla teoria sulle disequazioni irrazionali sappiamo che

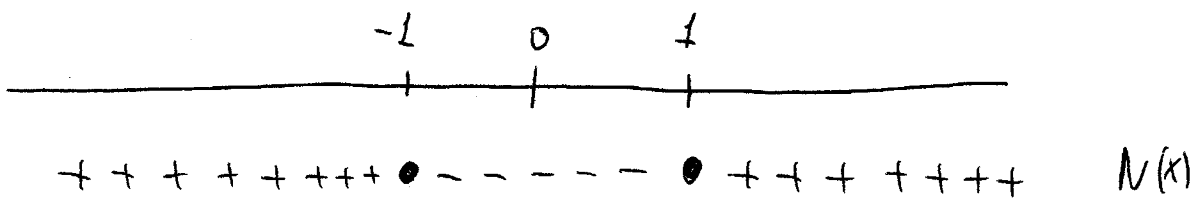
$$\sqrt[\text{PARI}]{A(x)} \geq K \quad (\text{con } K<0)$$

si studia soltanto $A(x) \geq 0$

Nel nostro caso

$$x^2-1 \geq 0 \quad (15)$$

Ma noi la (15) la abbiamo già studiata, studiando la (1). Dobbiamo soltanto esprimere le soluzioni esplicitando i segni. Si veda Grafico di (1) pag (2)



Studiamo $D(x) > 0$

Ricordiamo che il denominatore lo si studia sempre > 0 e mai ≥ 0 visto che se $D(x) = 0$ la frazione diverge a ∞ e $\infty \notin \mathbb{R}$.

$D(x) > 0$

$$\sqrt{x^2 - 4} - 2x + 3 > 0 ; \qquad (16)$$

$$\sqrt{x^2 - 4} > 2x - 3 \qquad (17)$$

Dalla teoria sulle disequazioni irrazionali sappiamo che

$$\sqrt{A(x)} > B(x) \qquad (18)$$

equivale a studiare

$$\begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases} \qquad (19)$$

Cioè

$$(20)\begin{cases} 2x-3<0 \\ x^2-4 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ x^2-4 > (2x-3)^2 \end{cases} (21)$$

Studiamo la 20.1

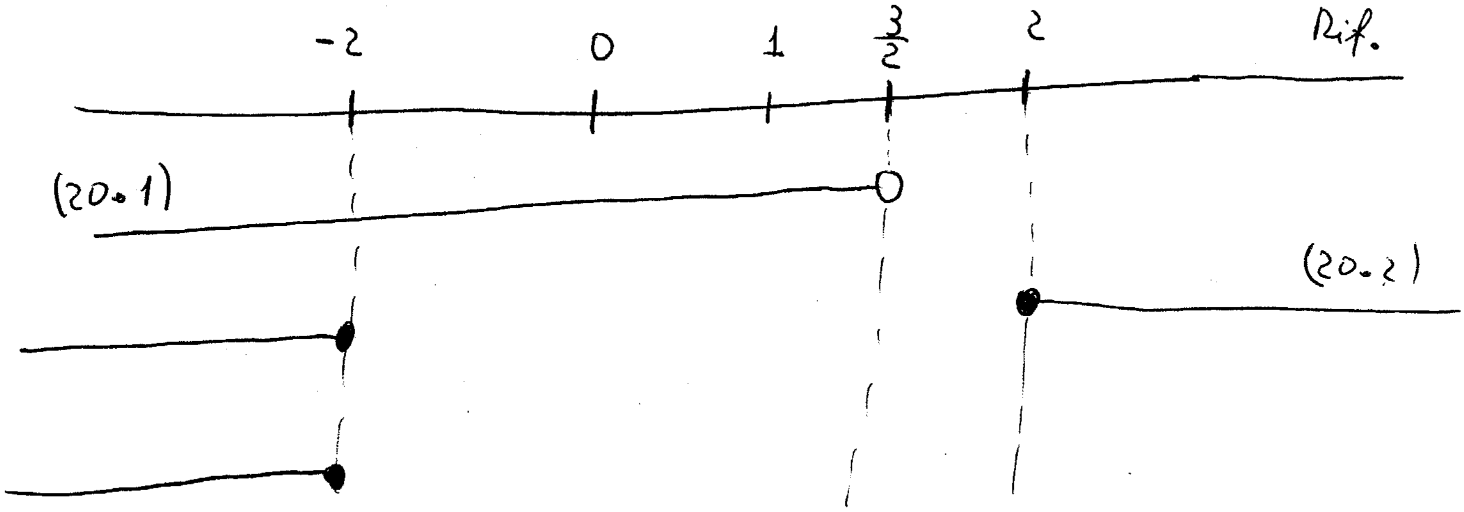
$2x-3<0, \quad 2x<3, \quad x<\frac{3}{2}$

Studiamo la 20.2

$x^2-4 \geq 0$

La abbiamo già studiata studiando la (2)

Studiamo il sistema (20) intersecando la (20.1) $\wedge$ (20.2)



soluzione sistema (20)

Studiamo il sistema (21)

21.1 $\quad 2x-3\geq 0$, $2x\geq 3$, $x\geq \frac{3}{2}$

Studiamo la 21.2

$$x^2-4>(2x-3)^2 \; ; \quad x^2-4>4x^2+9-12x \; ;$$

$$x^2-4-4x^2-9+12x>0 \; ; \quad -3x^2+12x-13>0 \quad (22)$$

Non vogliamo studiare la (22) nella forma con il coefficiente della variabile di ordine massimo in forma negativa e a tale scopo moltiplichiamo la (22) per (-1), ricordandoci però di moltiplicare per (-1) le soluzioni

$$3x^2-12x+13<0 \quad (23)$$

$$\Delta = b^2-4ac = 144-4(3)(13) = 144-156 = -12$$

Se $\Delta < 0$ e la famiglia della (23) è < 0 (11)

$\Rightarrow$ NON ci sono soluzioni $\Rightarrow$

non ci sono soluzioni negative $\Rightarrow$ le

soluzioni di (23) sono tutte positive $\Rightarrow$

Visto che abbiamo moltiplicato per (-1) che

le soluzioni di (22) sono tutte <u>negative</u>.

Ma la (22) cerca le soluzioni

positive $\Rightarrow$ la (22) non ha soluzioni

$\Rightarrow$ l'insieme vuoto $\emptyset$ è la soluzione

della (22).

Per cui l'intersezione tra $(22) \cap 21.1$ è

l'insieme vuoto $\emptyset$.

Cioè il sistema (21) non ha

soluzioni $\Rightarrow$

Sistema (20) $\cup$ Sistema (21) = Sistema (20)

Cioè

Sistema (20) $\cup$ Sistema (21) =

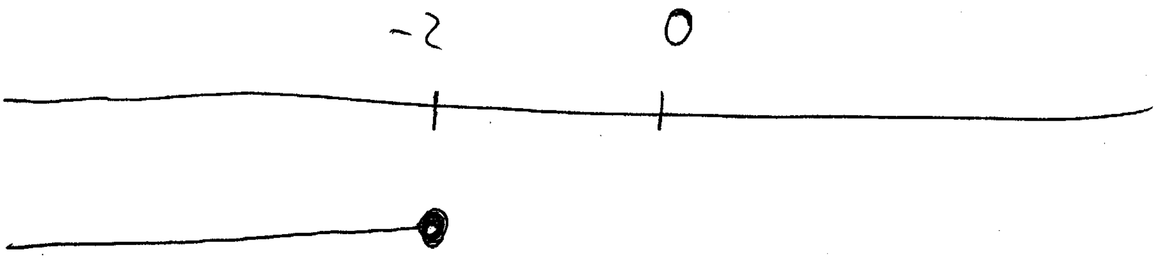


Grafico (7)

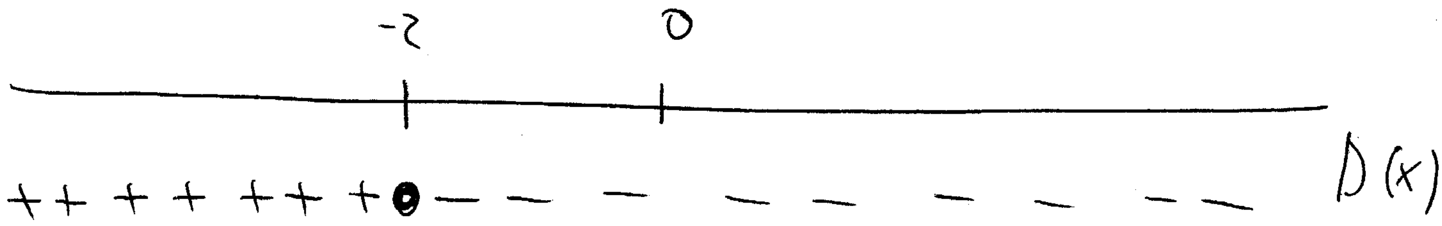
L'unione di tali sistemi rappresentava la soluzione della (17)

$$\sqrt{x^2-4} > 2x-3$$

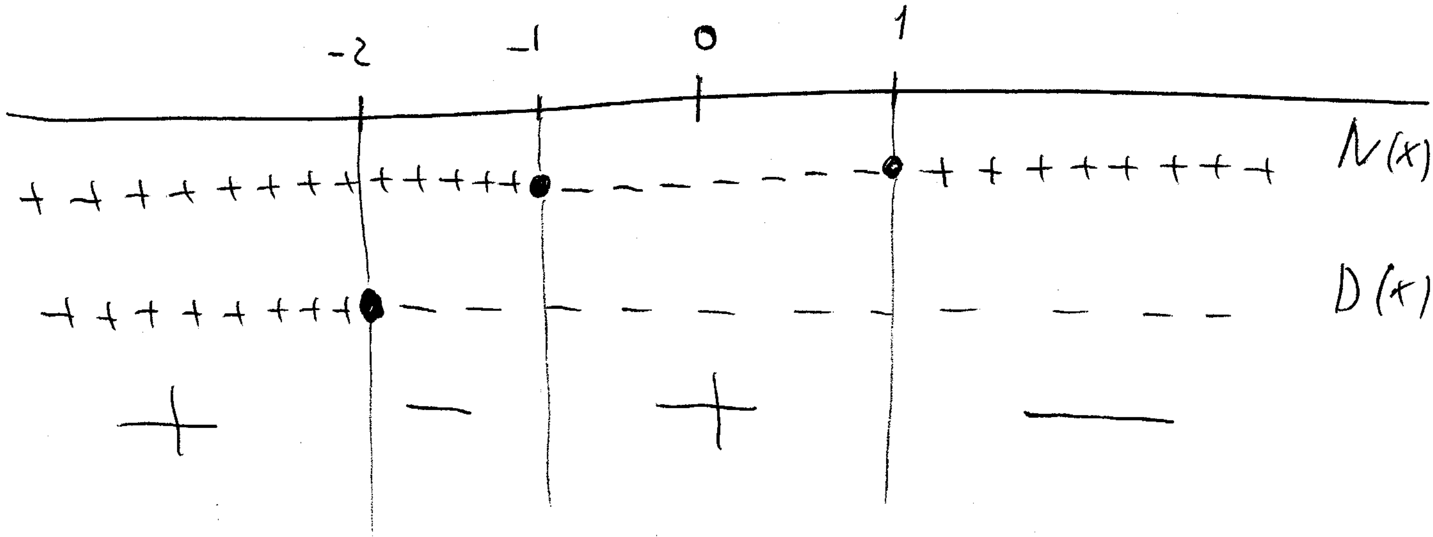
che rappresentava $D(x) > 0$

$$\sqrt{x^2-4} - 2x + 3 > 0$$

Quindi la linea continua nel Grafico (7) rappresenta le x che rendono positivo $D(x)$. Visto che dobbiamo studiare una razionale fratta esplicitiamo i segni di $D(x)$.



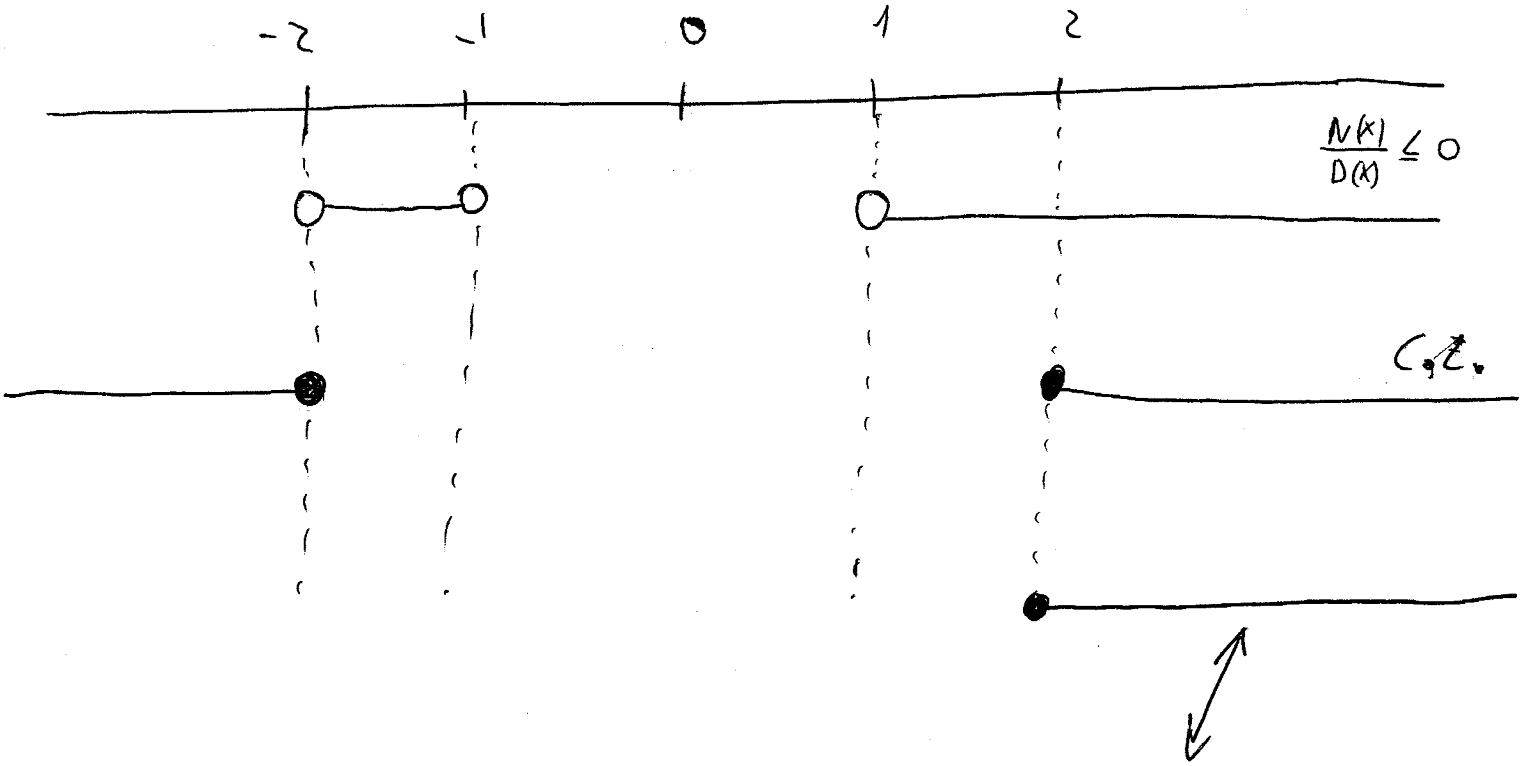
Studiamo adesso $\frac{N(x)}{D(x)}$



La traccia dell'esercizio ricerca le x che ci fanno ottenere risultati ≤ 0 $\Rightarrow$

Tale grafico rappresenta dove il rapporto $\frac{N(x)}{D(x)}$ è ≤ 0

Tale grafico dobbiamo intersecarlo con il C.E.



Soluzione Totale

Risulta evidente che

Soluzione disequazione $\frac{N(x)}{D(x)} \leq 0 \cap$ C.E. =

= Soluzione Totale : $x \geq 2$!