Funzioni Composte e Derivazione delle funzioni composte

Francesco Zumbo

www.francescozumbo.it

http://it.geocities.com/zumbof/

Questi appunti vogliono essere un ulteriore strumento didattico per gli studenti. Idea che mi é venuta dopo essere stato a contatto con bambini e studenti affetti da Sclerosi Multipla, costretti a lunghe degenze presso il Reparto di Neurologia dell'Ospedale di Fidenza (Parma), Divisione Diretta da una Eccezionale persona, il ***Prof. Enrico Montanari*** *a cui mia riconoscenza e stima andranno Sempre.*

A coloro che vorranno dare un piccolo contributo all'Associazione Nazionale per la Lotta Contro la Sclerosi Multipla (sezione di Parma) un Grande Grazie!!!

Conto Corrente Postale : 13 50 34 38 - Intestato a: AISM di Parma (Associazione Italiana Sclerosi Multipla) di Parma - Indirizzo: Piazzale S. Sepolcro, 3 - 43100 Parma (PR) - Telefono : 0521-231251.

Con la seguente Causale: **+ Matematica ,- Sclerosi Multipla**

1. Alcuni esempi di Funzioni Composte

(1) $h(x) = \sqrt{x^3}$

(2) $h(x) = \sin(\cos(x))$

(3) $h(x) = \ln \frac{1}{x}$

2. Generalitá sulle funzioni composte

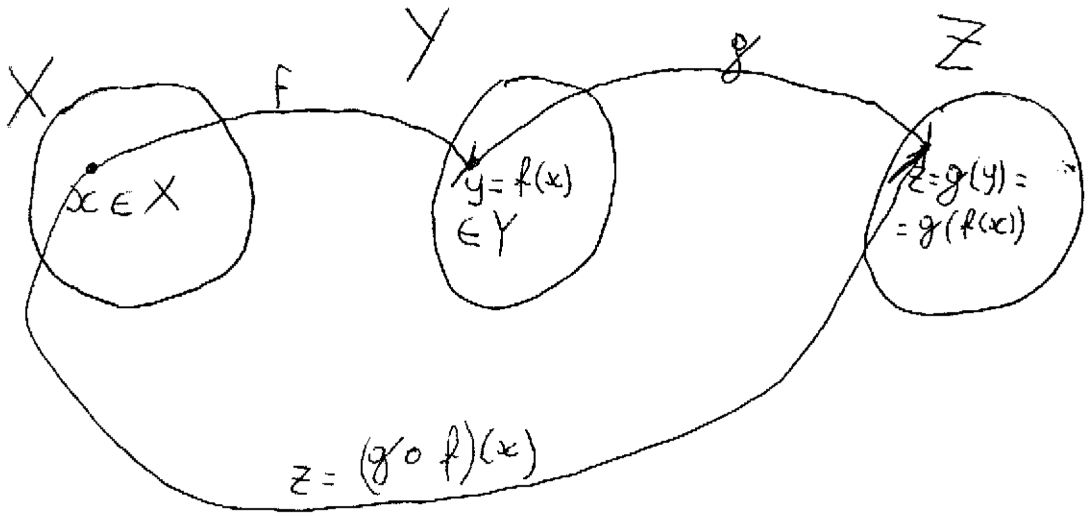

Figura 1

Siano X , Y, Z tre insiemi numerici che possiamo immaginare essere sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Sia f una funzione definita in X a valori in Y e g una funzione definita in Y a valori in Z.

Cioé

- $f : X \to Y$
- $g : Y \to Z$

chiamiamo x gli elementi di X, y gli elementi di Y e z gli elementi di Z; h é la ***funzione composta*** di componenti le funzioni f e g.

h risulta essere definita nell'insieme dove é definita la prima funzione $f(x)$ a valori nell'insieme delle immagini del'ultima funzione, l'insieme Z, cioé

$$h : X \to Z \tag{2.1}$$

con

$$z = h(x) = (g \circ f)(x) \tag{2.2}$$

Il terzo membro si legge: ” f composto g”.

Possiamo cosí sintetizzare il passaggio di variabile

$$x \in X \mapsto^f y = f(x) \in Y \mapsto^g z = g(y) \in Z \tag{2.3}$$

che in termini di funzione composta diviene

$$x \in X \to^h z = h(x) \in Z \tag{2.4}$$

In questa ottica, le funzioni scritte della SEZIONE.1 possono essere cosí descritte:

La prima

$$h(x) = \sqrt{x^3} \tag{2.5}$$

diviene

$$x \mapsto^f y = f(x) = x^3 \mapsto^g z = g(y) = \sqrt{y} \tag{2.6}$$

La seconda

$$h(x) = \sin(\cos(x)) \tag{2.7}$$

diviene

$$x \mapsto^f y = f(x) = \cos(x) \mapsto^g z = g(y) = \sin(y) \tag{2.8}$$

La terza

$$h(x) = \ln\,\frac{1}{x} \tag{2.9}$$

diviene

$$x \mapsto^f y = f(x) = \frac{1}{x} \mapsto^g z = g(y) = \ln(y) \tag{2.10}$$

Tali considerazioni portano alla seguente scrittura

$$h(x) = (g \circ f)(x) \tag{2.11}$$

É bene notare che la si legge non da sinistra verso destra ma da destra verso sinistra.

Questo perché la prima funzione da applicare é la f che lavora sulla variabile x e ci fa ottenere come immagine la $y = f(x)$; poi si applica la g alla variabile y e si ottiene l'immagine $z = g(y) = h(x) = (g \circ f)(x)$.

Dopo tale introduzione possiamo spingerci a descrivere come funzione composta la seguente e articolata funzione

(2.12) $$h(x) = \sqrt{\ln(\sin(x^2))}$$

In termini delle sua componenti diviene

(2.13)

$$x \mapsto^f y = f(x) = x^2 \mapsto^g z = g(y) = \sin(y) \mapsto^k t = k(z) = \ln(z) \mapsto^j u = j(t) = \sqrt{t}$$

con

$$y = f(x) = x^2$$

$$z = g(y) = \sin(y$$

$$t = k(z) = \ln(z)$$

$$u = j(t) = \sqrt{t}$$

in termini formali la funzione composta é

(2.14) $$h(x) = (j \circ k \circ g \circ f)(x)$$

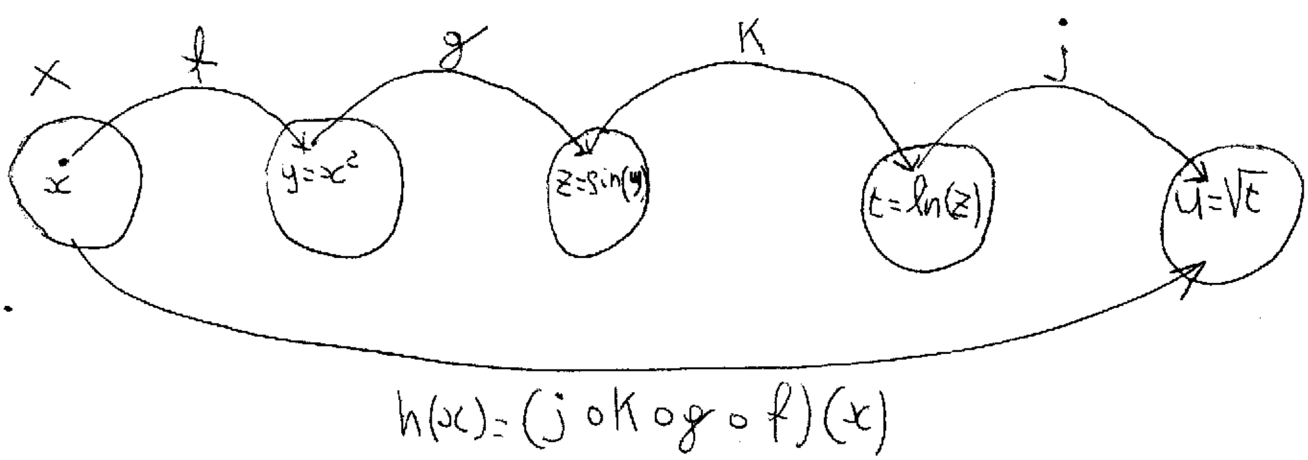

Figura 2

le variabili delle funzioni sono

- x per la funzione f
- y per la funzione g
- z per la funzione k
- t per la funzione j
- x per la funzione composta h

in tal modo anche funzioni molto complesse, possono essere indicate in maniera molto semplice e sequenziale.

3. Derivazione delle funzioni composte

Grazie agli studi di Liebniz e di Newton sappiamo derivare le funzioni composte; ad esempio, la funzione

$$h(x) = \sqrt{x^3} \tag{3.1}$$

scritta in termini di funzione composta

$$x \mapsto^f y = f(x) = x^3 \mapsto^g z = g(y) = \sqrt{y} \tag{3.2}$$

la derivata $h'(x)$ é data dalla **fondamentale regola di Liebniz**

$$\mathbf{h}'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}'(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \tag{3.3}$$

É importante ricordare che nell'espressione finale si dová avere solo e soltando la variabile x quindi a tale scopo si dovrá procedere ad un cambiamento di variabile.

Ció si identifica nei seguenti passaggi , se

$$z = g(y) = \sqrt{y}$$

implica che

$$g'(y) = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$$

inoltre da

$$y = f(x) = x^3$$

segue che

$$f'(x) = 3x^2$$

In virtú di quanto detto nella (3.3)

$$h'(x) = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2 \tag{3.4}$$

ma nel secondo membro della (3.4) é presente la variabile y che possiamo sostituire con $y = x^3$

$$h'(x) = \frac{1}{2}(x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2 \tag{3.5}$$

$$h'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \cdot 3x^2 \tag{3.6}$$

$$h'(x) = \frac{1}{2}x^{(-\frac{3}{2}+2)} \tag{3.7}$$

$$h'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-3+4}{2}} \tag{3.8}$$

$$h'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} \tag{3.9}$$

$$h'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} \tag{3.10}$$

In definitiva la derivata della funzione

$$h(x) = \sqrt{x^3} \tag{3.11}$$

é la funzione (3.10)

4. Esempi svolti

4.1. **La funzione**

$$h(x) = \sin(\cos(x))$$

. Scritta in termini di funzioni che la compongono diviene

$$x \mapsto^{f} y = f(x) = \cos(x) \mapsto^{g} z = g(y) = \sin(y) \tag{4.1}$$

$$y = f(x) = \cos(x)$$

$$z = g(y) = \sin(y)$$

considerando le derivate delle funzioni g e f

- $y' = f'(x) = -\sin(x)$
- $z' = g'(y) = \cos(y)$

sapendo che

$$h'(x) = g'(y) \cdot f'(x) \tag{4.2}$$

possiamo scrivere

$$h'(x) = \cos(y) \cdot (-\sin(x)) \tag{4.3}$$

ma

$$y = \cos(x)$$

quindi

$$h'(x) = \cos(\cos(x)) \cdot (-\sin(x)) \tag{4.4}$$

$$h'(x) = -\sin(x) \cdot \cos(\cos(x)) \tag{4.5}$$

4.2. **La funzione**

$$h(x) = \ln\frac{1}{x}$$

. é scomponibile in

$$h(x) = (g \circ f)(x) \tag{4.6}$$

$$x \mapsto^f y = f(x) = \frac{1}{x} \mapsto^g z = g(y) = \ln(y) \tag{4.7}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(y) = \ln(y)$$

le cui derivate sono

- $f'(x) = -x^{-2}$
- $g'(y) = \frac{1}{y}$

sapendo che

$$h'(x) = g'(y) \cdot f'(x) \tag{4.8}$$

scriviamo

$$h'(x) = \frac{1}{y} \cdot (-x^{-2}) \tag{4.9}$$

sostituendo ad y

$$y = \frac{1}{x}$$

segue

$$h'(x) = \frac{1}{\frac{1}{x}} \cdot (-x^{-2}) \tag{4.10}$$

$$h'(x) = x \cdot (-x^{-2}) \tag{4.11}$$

$$h'(x) = -x^{-1} \tag{4.12}$$

in definitiva

$$h'(x) = -\frac{1}{x} \tag{4.13}$$

4.3. **La funzione** $h(x) = \sqrt{\ln(\sin(x^2))}$**.** scomposta diviene

(4.14)

$$x \mapsto^f y = f(x) = x^2 \mapsto^g z = g(y) = \sin(y) \mapsto^k t = k(z) = \ln(z) \mapsto^j u = j(t) = \sqrt{t}$$

dove

$$y = f(x) = x^2$$

$$z = g(y) = \sin(y)$$

$$t = k(z) = \ln(z)$$

$$u = j(t) = \sqrt{t}$$

per cui risulterá

(4.15) $$h'(x) = f'(x) \cdot g'(y) \cdot k'(z) \cdot j'(t)$$

esplicitando le derivate delle funzioni componenti si ha

- $y' = f'(x) = 2x$
- $z' = g'(y) = \cos(y)$
- $t' = k'(z) = \frac{1}{z}$
- $u' = j'(t) = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$

Prima di procedere con il prodotto delle derivate,ricordando che le variabili y, z, t bisogna convertirle nella variabile x, procediamo con tale conversione:

Ricordando che

- $y = x^2$
- $z = \sin(y)$
- $t = \ln(z)$

possiamo scrivere

- $g'(y) = \cos(y) = \cos(x^2)$
- $k'(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{\sin(y)} = \frac{1}{\sin(x^2)}$
- $j'(t) = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\ln(z))^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\ln(\sin(y)))^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\ln(\sin(x^2)))^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\ln(\sin x^2)}}$

e per la (4.15) si ha

$$h'(x) = [2x] \cdot [\cos(x^2)] \cdot [\frac{1}{\sin(x^2)}] \cdot [\frac{1}{2\sqrt{\ln(\sin x^2)}}] \tag{4.16}$$

$$h'(x) = [2x][\frac{\cos(x^2)}{\sin(x^2)}][\frac{1}{2\sqrt{\ln(\sin x^2)}}] \tag{4.17}$$

cioé

$$h'(x) = [2x][ctgx^2][\frac{1}{2\sqrt{\ln(\sin x^2)}}] \tag{4.18}$$

$$h'(x) = \frac{[2x][ctgx^2]}{2\sqrt{\ln(\sin x^2)}} \tag{4.19}$$

4.4. **La Funzione**

$$h(x) = \sqrt{x^2 \sin(x)}$$

. Scritta in termini di funzione composta

$$x \to^f y = f(x) = x^2 \sin(x) \to^g z = g(y) = \sqrt{y} \tag{4.20}$$

$$h(x) = (g \circ f)(x) \tag{4.21}$$

dove

$$y = f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$$

$$z = g(y) = \sqrt{y}$$

per la regola :

$$h'(x) = f'(x) \cdot g'(x) \tag{4.22}$$

calcoliamo la derivata $f'(x)$, dove ovviamente, si deve applicare la regola di derivazione del prodotto, che quí riportiamo.

Se una funzione $f(x)$ é data dal prodotto di due funzioni, che per la circostanza possiamo chiamare $l(x)$ e $m(x)$

$$f(x) = l(x) \cdot m(x) \tag{4.23}$$

la sua derivata la si calcola secondo la regola

”*La derivata del primo fattore per il secondo non derivato* + *il primo fattore non derivato per la derivata del secondo fattore*”

$$f'(x) = l'(x) \cdot m(x) + l(x) \cdot m'(x) \tag{4.24}$$

nel caso specifico indichiamo con le funzioni $l(x)$ e $m(x)$

- $l(x) = x^2$
- $m(x) = \sin(x)$

per cui

- $l'(x) = 2x$
- $m'(x) = \cos(x)$

quindi

$$f'(x) = 2x \cdot \cos(x) + x^2 \cdot \sin(x) \tag{4.25}$$

Calcoliamo adesso la derivata della funzione $g(y)$

$$z' = g(y) = \sqrt{y} = (y)^{\frac{1}{2}}$$

$$z' = g'(y) = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \tag{4.26}$$

esplicitando nella $g'(y)$ la variabile x si ottiene

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 \sin(x)}} \tag{4.27}$$

A questo punto sapendo che

$$h'(x) = f'(x) \cdot g'(x) \tag{4.28}$$

si ha

$$h'(x) = \{2x \cdot \cos(x) + x^2 \cdot \sin(x)\} \cdot \{\frac{1}{2\sqrt{x^2\sin(x)}}\} \tag{4.29}$$

$$h'(x) = \frac{2x \cdot \cos(x) + x^2 \cdot \sin(x)}{2\sqrt{x^2\sin(x)}} \tag{4.30}$$

che é la derivata cercata.