Liceo Scientifico Statale

"Leonardo da Vinci"

Via Possidonea, 14 - 89100 Reggio Calabria - Tel: 0965-29911 / 312063

www.liceovinci.rc.it

Anno Scolastico 2007-2008

Area dell'Ellisse con il calcolo integrale

e risoluzione del fondamentale integrale irrazionale

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

Prof. Francesco Zumbo

www.francescozumbo.it oppure http://zumbo.netsons.org

e-mail personale : zumbo2008@yahoo.it

Dedico questo lavoro Scientifico Didattico

a mia Madre Paola , che con infinito affetto é stata la mia guida

Francesco Zumbo

Reggio Calabria, 7 Settembre 2008

Questi appunti vogliono essere un ulteriore strumento didattico per gli studenti. Idea che mi é venuta dopo essere stato a contatto con bambini e studenti affetti da Sclerosi Multipla, costretti a lunghe degenze presso il Reparto di Neurologia dell'Ospedale di Fidenza (Parma), Divisione Diretta da una Eccezionale persona, il ***Prof. Enrico Montanari*** *a cui mia riconoscenza e stima andranno Sempre.*

A coloro che vorranno dare un piccolo contributo all'Associazione Nazionale per la Lotta contro la Sclerosi Multipla (sezione di Parma) un Grande Grazie!!!

Conto Corrente Postale : 13 50 34 38 - Intestato a: AISM di Parma (Associazione Italiana Sclerosi Multipla) di Parma - Indirizzo: Piazzale S. Sepolcro, 3 - 43100 Parma (PR) - Telefono : 0521-231251.

Con la seguente Causale: **+ Matematica ,- Sclerosi Multipla**

1. Generalitá

Data l'ellisse γ di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1.1}$$

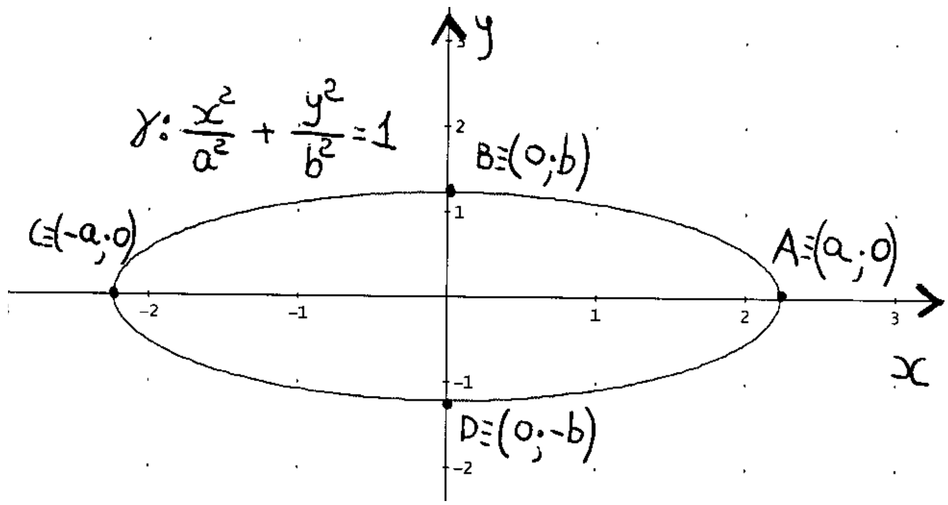

Figura 1. Grafico dell'ellisse

con a semiasse sull'asse delle ascisse x e b semiasse sull'asse delle ordinate y. Ci proponiamo di calcolare l'area di tale ellisse con un metodo che ritengo semplice , rigoroso e accessibile.

Per prima cosa esprimiamo in *forma parametrica* l'equazione dell'ellisse.

Le sostituzioni delle variabili x e y per la forma parametrica sono:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos(t) \\ y = b \cdot \sin(t) \end{cases} \tag{1.2}$$

con la variabile $t \in [0; 2\pi]$.

Esplicitiamo la y dell'equazione (1.1)

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})$$

$$y = \pm\sqrt{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})} = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$y = \ \pm b\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}} = \pm\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2 - x^2}$$

in definitiva

(1.3) $$y = \pm\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2 - x^2}$$

la (1.3) rappresenta l'equazione di tutta l'ellisse, ma al fine di ottenere la proprietá di funzionalitá, consideriamo soltanto la parte positiva o negativa dell'equazione. Scegliamo per la circostanza la parte positiva

(1.4) $$y = \frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2 - x^2}$$

Per calcolare l'area dell'ellisse possiamo calcolare l'area di $\frac{1}{4}$ dell'area dell'ellisse, viste le condizioni di simmetria rispetto a ciascuno degli assi.

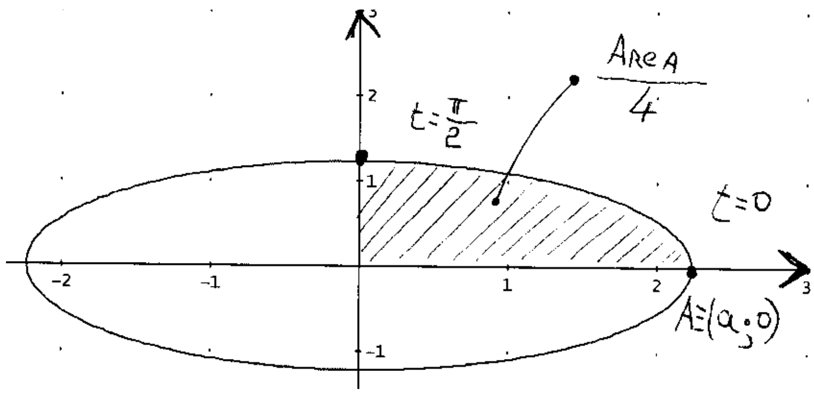

Figura 1. L'Area che calcoleremo

Quindi

$$(\frac{Area\,dell'ellisse}{4}) = \int_0^a y(x)\,dx = \tag{1.5}$$

$$= \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

Sintetizzando

$$(\frac{Area\,dell'ellisse}{4}) = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \tag{1.6}$$

Il nostro problema, attualmente, si é trasferito *nel calcolo dell'integrale irrazionale:*

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \tag{1.7}$$

a tale scopo, inseriamo nella (1.7) la sostituzione parametrica

$$x = a\cdot\cos(t)$$

con $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

differenziamo

$$dx = a\cdot(\cos(t))'\,dt \tag{1.8}$$

$$dx = a\,(-\sin(t))\,dt$$

$$dx = -a \cdot \sin(t) \cdot dt \tag{1.9}$$

Integriamo per sostituzione la (1.7)

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \cdot \cos^2(t)} \cdot (-a \sin(t))\, dt = \tag{1.10}$$

$$= \int \sqrt{a^2 \cdot (1 - \cos^2(t)} \cdot (-a \cdot \sin(t))\, dt =$$

$$= -a \int a \cdot \sqrt{1 - \cos^2(t)} \cdot \sin(t)\, dt =$$

$$-a^2 \int \sqrt{1 - \cos^2(t)}\, \sin(t)\, dt$$

Riassumiamo

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = -a^2 \int \sqrt{1 - \cos^2(t)}\, \sin(t)\, dt \tag{1.11}$$

la quantitá

$$\sqrt{1 - \cos^2(t)}$$

dalla relazione fondamentale della goniometria

$$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$$

é uguale a $\sin(t)$ cioé

$$\sqrt{1 - \cos^2(t)} = \sin(t) \tag{1.12}$$

inseriamo la (1.12) nella (1.11)

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = -a^2 \cdot \int \sin(t) \cdot \sin(t)\, dt = -a^2 \int \sin^2(t)\, dt \tag{1.13}$$

cosí facendo, abbiamo trovato l'intermedio risultato

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = -a^2 \int \sin^2(t)\, dt \tag{1.14}$$

Calcoliamo adesso

$$\int \sin^2(t)\, dt \tag{1.15}$$

dalle formule di duplicazione sappiamo che

$$\cos(2t) = 1 - 2\,\sin^2(t) \tag{1.16}$$

implica che

$$\cos(2t) - 1 = -2\,\sin^2(t)$$

$$2\,\sin^2(t) = 1 - \cos(2t)$$

$$\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2} \tag{1.17}$$

inseriamo la (1.17) nel calcolo dell'integrale (1.15)

$$\int \sin^2(t)\, dt \; = \int \frac{1 - \cos(2t)}{2}\, dt = \int (\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2})\, dt = \tag{1.18}$$

$$= \int \frac{1}{2}\, dt \; - \int \frac{\cos(2t)}{2}\, dt \; = \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \int \cos(2t)\, dt$$

da cui

$$\int \sin^2(t)\, dt \; = \frac{1}{2}\, t \; - \frac{1}{2} \int \cos(2t)\, dt \tag{1.19}$$

Risolviamo separatamente

$$\int \cos(2t)\, dt \tag{1.20}$$

a tale scopo poniamo la sostituzione

$$u = 2t \quad \Rightarrow$$

$$du = 2\,dt \quad \Rightarrow$$

(1.21)
$$dt = \frac{1}{2}\,du$$

da cui

(1.22)
$$\int \cos\, 2t\,dt = \int \cos(u)\,\cdot\,\frac{1}{2}\,\cdot\,du = \frac{1}{2}\int \cos(u)\,\cdot\,du = \frac{1}{2}\,\sin(u) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\sin(2t)$$

in definitiva si ha

(1.23)
$$\int \cos(2t)\,dt = \frac{1}{2}\sin(2t)$$

In precedenza avevamo trovato che

(1.24)
$$\int \sin^2(t)\,dt = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\int \cos(2t)\,dt$$

da cui

(1.25)
$$\int \sin^2(t)\,dt = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\,\cdot\,\frac{1}{2}\,\cdot\,\sin(2t) = \frac{1}{2}\,t - \frac{1}{4}\,\cdot\,\sin(2t)$$

Cioé

(1.26)
$$\int \sin^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\,t - \frac{1}{4}\,\cdot\,\sin(2t)$$

Dalla (1.14) sappiamo che

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -a^2 \int \sin^2(t)\,dt$$

pertanto

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = -a^2\, [\frac{1}{2}\, t - \frac{1}{4}\, \cdot\, \sin(2t)] \tag{1.27}$$

Inoltre, sappiamo, che se la variabile x descrive un quarto dell'ellisse, significa che appartiene all'intervallo $x \in [0; a]$, mentre la variabile t per descrivere il medesimo intervallo con le formule parametriche scelte, appartiene: $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$$(\frac{Area}{4}) = \frac{b}{a}\, \cdot\, \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{b}{a}\, \cdot\, (-a^2)\, \cdot\, [\frac{1}{2}\, t - \frac{1}{4}\, \sin(2t)]_0^{\pi/2} \tag{1.28}$$

in definitiva

$$(\frac{Area}{4}) = -b\, \cdot\, a\, [\frac{1}{2}\, t - \frac{1}{4}\, \sin(2t)]_0^{\pi/2} \tag{1.29}$$

infatti se t varia da 0 a $\frac{\pi}{2}$ si descrive mediante le equazioni parametriche $\frac{1}{4}$ dell'ellisse. Sviluppiamo la differenza delle primitive

$$\begin{aligned}(\frac{Area}{4}) &= -b\, \cdot\, a\, \{\frac{1}{2}\, \cdot\, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\, \cdot\, \sin(2\, \cdot\, \frac{\pi}{2}) - (\frac{1}{2}\, \cdot\, 0 - \frac{1}{4}\, \cdot \sin(0))\} = \\ &= -b\, \cdot\, a\{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\, \cdot\, 0 - (0 - \frac{1}{4}\, \cdot\, 0)\} = \\ &= -a\, \cdot\, b\, \{\frac{\pi}{4} - 0 - 0\} = -ab\, \cdot\, \frac{\pi}{4}\end{aligned} \tag{1.30}$$

visto che l'area é sempre una quantitá positiva scriviamo

$$\frac{Area}{4} = ab\, \cdot\, \frac{\pi}{4} \tag{1.31}$$

da cui

$$Area\ dell'Ellisse = a \cdot b \cdot \pi$$

Risulta chiaro che l'area dell'ellisse é data dal prodotto dei due semiassi a e b per il numero irrazionale π.