Appunti e lezioni di Matematica e Fisica

www.francescozumbo.it

Svolgimento del 1° Problema di Matematica e Fisica

degli Esami di Stato del Liceo Scientifico 2018-2019

A Cura:

Prof. Antonino Agostino - email : gourlak@virgilio.it

Prof. Francesco Zumbo – email : zumbo2008@yahoo.it

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE
LI15 - SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO
(Testo valevole anche per le corrispondenti sperimentazioni internazionali e quadriennali)

Tema di: MATEMATICA e FISICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

PROBLEMA 1

Si considerino le seguenti funzioni:

$$f(x) = ax^2 - x + b \qquad\qquad g(x) = (ax + b)\, e^{2x - x^2}.$$

- Provare che, comunque siano scelti i valori di a e b in $\mathbb{R}$ con $a \neq 0$, la funzione g ammette un massimo e un minimo assoluti. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali i grafici delle due funzioni f e g si intersecano nel punto $A(2, 1)$.

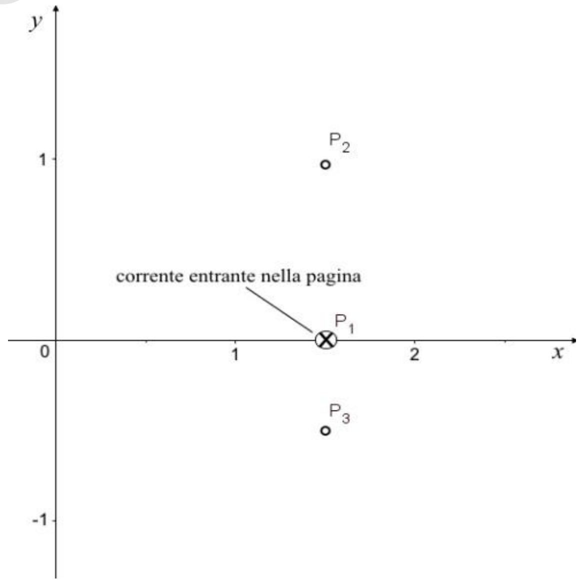
- Si assuma, d'ora in avanti, di avere $a = 1$ e $b = -1$. Studiare le due funzioni così ottenute, verificando che il grafico di g ammette un centro di simmetria e che i grafici di f e g sono tangenti nel punto $B(0, -1)$. Determinare inoltre l'area della regione piana S delimitata dai grafici delle funzioni f e g.

- Si supponga che nel riferimento Oxy le lunghezze siano espresse in metri (m). Si considerino tre fili conduttori rettilinei disposti perpendicolarmente al piano Oxy e passanti rispettivamente per i punti:

  $P_1\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $P_2\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ e $P_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

  I tre fili sono percorsi da correnti continue di intensità $i_1 = 2{,}0$ A, i_2 e i_3. Il verso di i_1 è indicato in figura mentre gli altri due versi non sono indicati.

  Stabilire come varia la circuitazione del campo magnetico, generato dalle correnti i_1, i_2 e i_3, lungo il contorno di S, a seconda dell'intensità e del verso di i_2 e i_3.

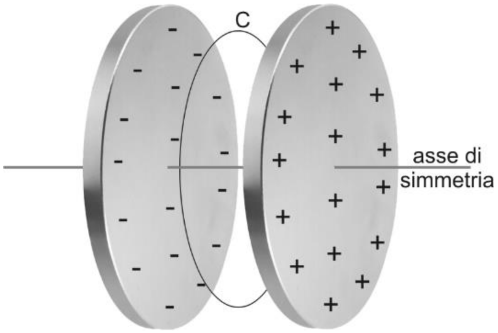


- Si supponga, in assenza dei tre fili, che il contorno della regione S rappresenti il profilo di una spira conduttrice di resistenza $R = 0{,}20\ \Omega$. La spira è posta all'interno di un campo magnetico uniforme di intensità $B = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ T perpendicolare alla regione S. Facendo ruotare la spira intorno all'asse x con velocità angolare ω costante, in essa si genera una corrente indotta la cui intensità massima è pari a 5,0 mA. Determinare il valore di ω.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

PROBLEMA 2

Un condensatore piano è formato da due armature circolari di raggio R, poste a distanza d, dove R e d sono espresse in metri (m). Viene applicata alle armature una differenza di potenziale variabile nel tempo e inizialmente nulla.



All'interno del condensatore si rileva la presenza di un campo magnetico $\vec{B}$. Trascurando gli effetti di bordo, a distanza r dall'asse di simmetria del condensatore, l'intensità di $\vec{B}$, espressa in tesla (T), varia secondo la legge:

$$|\vec{B}| = \frac{kt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}}\, r \qquad \text{con } r \le R$$

dove a e k sono costanti positive e t è il tempo trascorso dall'istante iniziale, espresso in secondi (s).

- Dopo aver determinato le unità di misura di a e k, spiegare perché nel condensatore è presente un campo magnetico anche in assenza di magneti e correnti di conduzione. Qual è la relazione tra le direzioni di $\vec{B}$ e del campo elettrico $\vec{E}$ nei punti interni al condensatore?

- Si consideri, tra le armature, un piano perpendicolare all'asse di simmetria. Su tale piano, sia C la circonferenza avente centro sull'asse e raggio r. Determinare la circuitazione di $\vec{B}$ lungo C e da essa ricavare che il flusso di $\vec{E}$, attraverso la superficie circolare delimitata da C, è dato da

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0 \varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a}\right)$$

  Calcolare la d.d.p. tra le armature del condensatore.
  A quale valore tende $|\vec{B}|$ al trascorrere del tempo? Giustificare la risposta dal punto di vista fisico.

- Per $a > 0$, si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$. Verificare che la funzione $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a}$ è la primitiva di f il cui grafico passa per l'origine. Studiare la funzione F, individuandone eventuali simmetrie, asintoti, estremi. Provare che F presenta due flessi nei punti di ascisse $t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$ e determinare le pendenze delle rette tangenti al grafico di F in tali punti.

- Con le opportune motivazioni, dedurre il grafico di f da quello di F, specificando cosa rappresentano le ascisse dei punti di flesso di F per la funzione f. Calcolare l'area della regione compresa tra il grafico di f, l'asse delle ascisse e le rette parallele all'asse delle ordinate passanti per gli estremi della funzione. Fissato $b > 0$, calcolare il valore di $\int_{-b}^{b} f(t)\, dt$.

QUESITI

1. Una data funzione è esprimibile nella forma $f(x) = \frac{p(x)}{x^2+d}$, dove $d \in \mathbb{R}$ e $p(x)$ è un polinomio. Il grafico di f interseca l'asse x nei punti di ascisse 0 e $12/5$ ed ha come asintoti le rette di equazione $x = 3$, $x = -3$ e $y = 5$. Determinare i punti di massimo e di minimo relativi della funzione f.

2. È assegnata la funzione

$$g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2017} + x^{2019}$$

Provare che esiste un solo $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $g(x_0) = 0$. Determinare inoltre il valore di

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{1{,}1^{\,x}}$$

3. Tra tutti i parallelepipedi rettangoli a base quadrata, con superficie totale di area *S*, determinare quello per cui la somma delle lunghezze degli spigoli è minima.

4. Dati i punti $A(2, 0, -1)$ e $B(-2, 2, 1)$, provare che il luogo geometrico dei punti *P* dello spazio, tali che $\overline{PA} = \sqrt{2}\,\overline{PB}$, è costituito da una superficie sferica *S* e scrivere la sua equazione cartesiana. Verificare che il punto $T(-10, 8, 7)$ appartiene a *S* e determinare l'equazione del piano tangente in T a *S*.

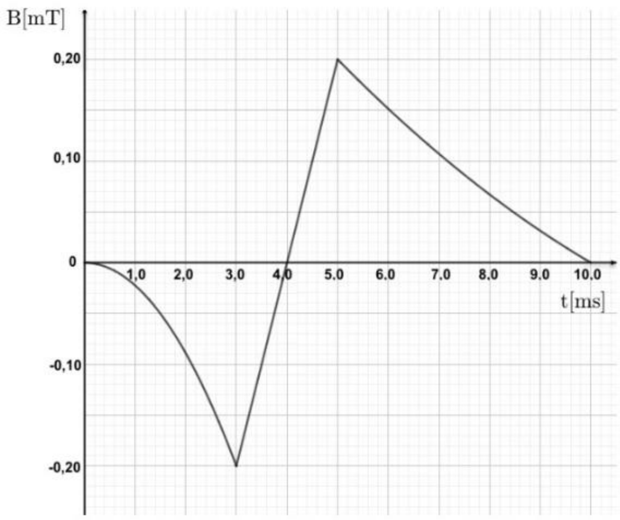
5. Si lanciano 4 dadi con facce numerate da 1 a 6.
   - Qual è la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti non superi 5?
   - Qual è la probabilità che il prodotto dei 4 numeri usciti sia multiplo di 3?
   - Qual è la probabilità che il massimo numero uscito sia 4?

6. Una spira di rame, di resistenza $R = 4{,}0\ \mathrm{m\Omega}$, racchiude un'area di $30\ \mathrm{cm}^2$ ed è immersa in un campo magnetico uniforme, le cui linee di forza sono perpendicolari alla superficie della spira. La componente del campo magnetico perpendicolare alla superficie varia nel tempo come indicato in figura. Spiegare la relazione esistente tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta. Calcolare la corrente media che passa nella spira durante i seguenti intervalli di tempo:

   a) da 0,0 ms a 3,0 ms;

   b) da 3,0 ms a 5,0 ms;

   c) da 5,0 ms a 10 ms.

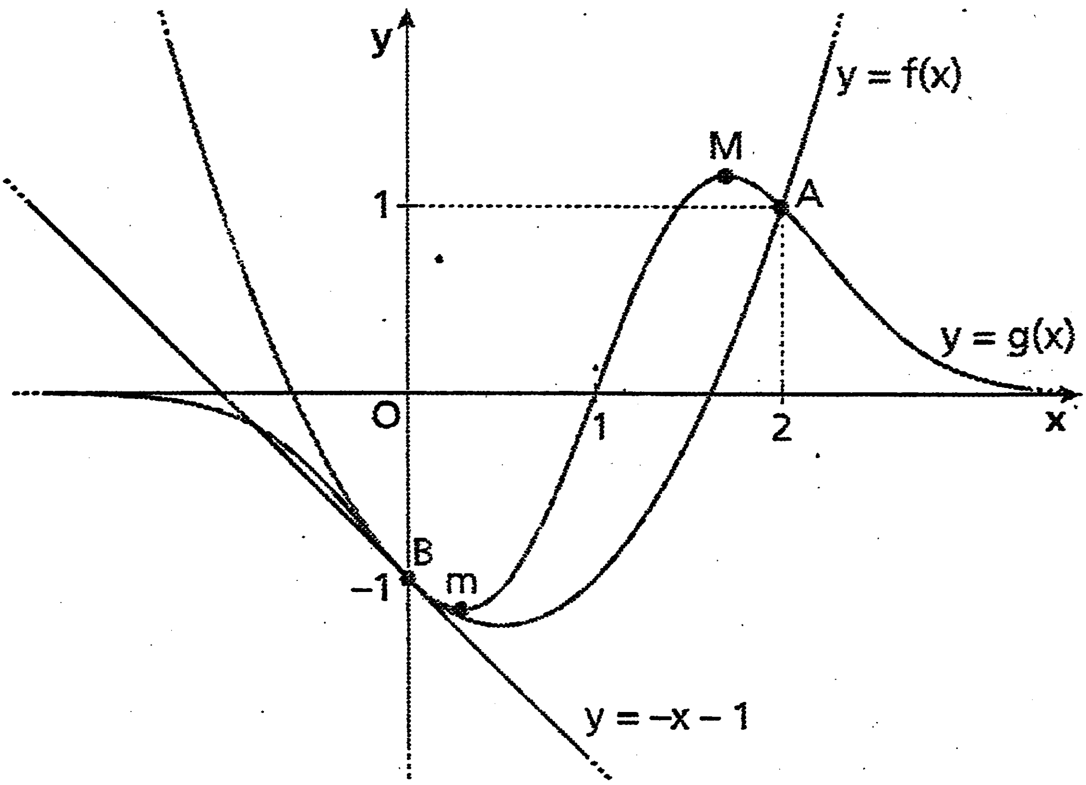


7. In laboratorio si sta osservando il moto di una particella che si muove nel verso positivo dell'asse x di un sistema di riferimento ad esso solidale. All'istante iniziale, la particella si trova nell'origine e in un intervallo di tempo di 2,0 ns percorre una distanza di 25 cm. Una navicella passa con velocità $v = 0{,}80\ c$ lungo la direzione x del laboratorio, nel verso positivo, e da essa si osserva il moto della stessa particella. Determinare le velocità medie della particella nei due sistemi di riferimento. Quale intervallo di tempo e quale distanza misurerebbe un osservatore posto sulla navicella?

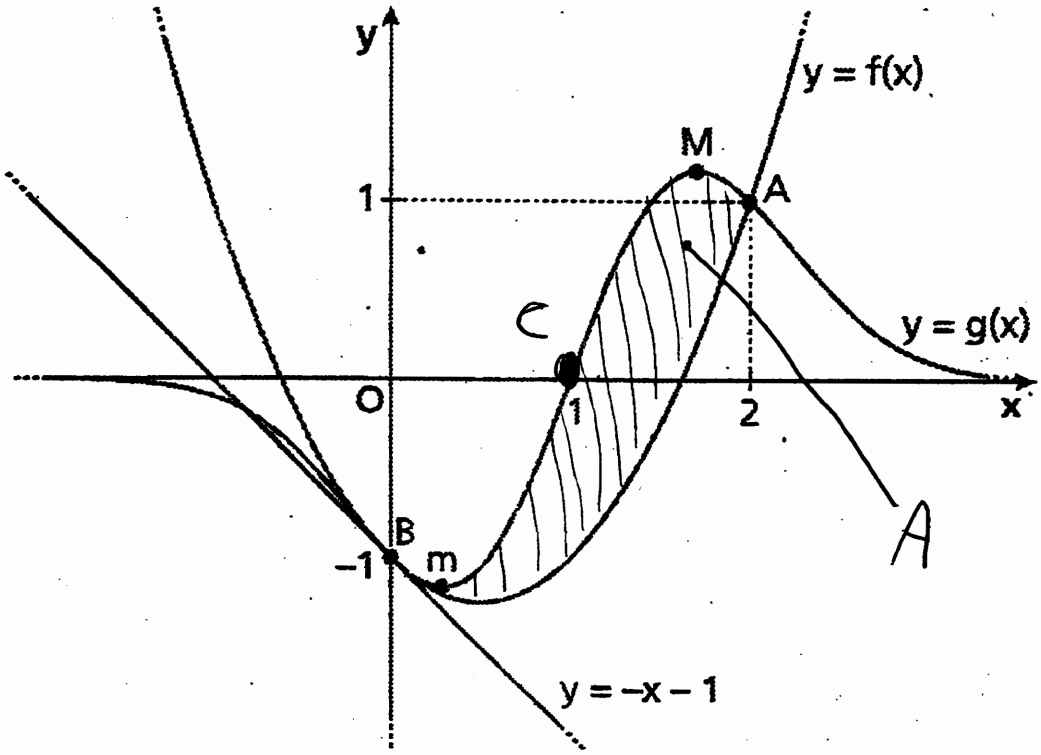
8. Un protone penetra in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme di modulo $|\vec{B}| = 1{,}00\ \text{mT}$. Esso inizia a muoversi descrivendo una traiettoria ad elica cilindrica, con passo costante $\Delta x = 38{,}1\ \text{cm}$, ottenuta dalla composizione di un moto circolare uniforme di raggio $r = 10{,}5\ \text{cm}$ e di un moto rettilineo uniforme. Determinare il modulo del vettore velocità e l'angolo che esso forma con $\vec{B}$.

COSTANTI FISICHE		
carica elementare	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$
massa del protone	m_p	$1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$
velocità della luce	c	$2{,}998 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}$

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 205 Art. 17 comma 9).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.



y
y = f(x)
M
A
1
y = g(x)
O
1
2
x
B
−1
m
y = −x − 1



y
x
O
1
2
1
−1
y = f(x)
y = g(x)
y = −x − 1
M
A
B
m
C
A

WWW.FRANCESCOZUMBO.IT
ESAMI DI STATO NEI LICEI SCIENTIFICI A.SC. 2018-2019

PROF. ANTONIO AGOSTINO
PROF. FRANCESCO ZUMBO

Siano

$$f(x) = ax^2 - x + b \tag{0.1}$$

$$g(x) = (ax + b) \cdot e^{2x-x^2} \tag{0.2}$$

le due funzioni date.
Se $a > 0$ la $f(x)$ é la parabola con concavitá rivolta verso l'alto, mentre se $a < 0$ la concavitá é rivolta verso il basso. La funzione $g(x)$ é il prodotto del fattore lineare $(ax + b)$ moltiplicato per il fattore esponenziale e^{2x-x^2} , si ricorda che tale fattore esponenziale é sempre > 0.
Analizziamo il comportamento della funzione $f(x)$ ai limiti del dominio.
Cioé studiamo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

.
É bene osservare che ax^2 é un infinito di ordine superiore rispetto a x quindi sostituendo non é una forma indeterminata.

$$\lim_{x \to +\infty} ax^2 - x + b =$$

Date: 01-07-2019.

$$\begin{cases} +\infty, & \text{se } a > 0; \\ -\infty, & \text{se } a < 0. \end{cases} \tag{0.3}$$

Calcoliamo

$$\lim_{x \to -\infty} ax^2 - x + b =$$

$$\begin{cases} +\infty, & \text{se } a > 0; \\ \\ -\infty, & \text{se } a < 0. \end{cases} \tag{0.4}$$

Calcoliamo

$$\lim_{x \to +\infty} (ax + b) \cdot e^{2x - x^2} = \lim_{x \to +\infty} (ax + b) \cdot \lim_{x \to +\infty} e^{2x - x^2} \tag{0.5}$$

Calcoliamo i limiti separatamente

$$\lim_{x \to +\infty} (ax + b) = \tag{0.6}$$

$$\begin{cases} +\infty, & \text{se } a > 0; \\ \\ -\infty, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} e^{2x - x^2} \tag{0.7}$$

$$e^{\lim_{x \to +\infty} 2x - x^2} =$$

ricordando sempre che x^2 é un infinito di ordine superiore a $2x$

$$= e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \tag{0.8}$$

In definitiva

$$\lim_{x\to+\infty} (ax+b)\cdot e^{2x-x^2} = 0 \ \ \forall a,b \in \mathbb{R} \tag{0.9}$$

Analogamente calcoliamo i limiti per $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} (ax+b) =$$

$$\begin{cases} -\infty, & \text{se } a > 0; \\ +\infty, & \text{se } a < 0. \end{cases} \tag{0.10}$$

Studiamo

$$\lim_{x\to-\infty} e^{2x-x^2} = e^{\lim_{x\to-\infty} 2x-x^2} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0 \tag{0.11}$$

In definitiva

$$\lim_{x\to-\infty} (ax+b)\cdot e^{2x-x^2} = 0 \ \forall a,b \in \mathbb{R} \tag{0.12}$$

In sintesi abbiamo provato che

$$\lim_{x\to\pm\infty} (ax+b)\cdot e^{2x-x^2} = 0 \ \forall a,b \in \mathbb{R} \tag{0.13}$$

Da cui si osserva che per la funzione $g(x)$ l'asse delle X di equazione $y = 0$ é un asintoto orizzontale.

É bene ricordare che per il grafico della funzione esponenziale il fattore

$$e^{2x-x^2}$$

é sempre > 0

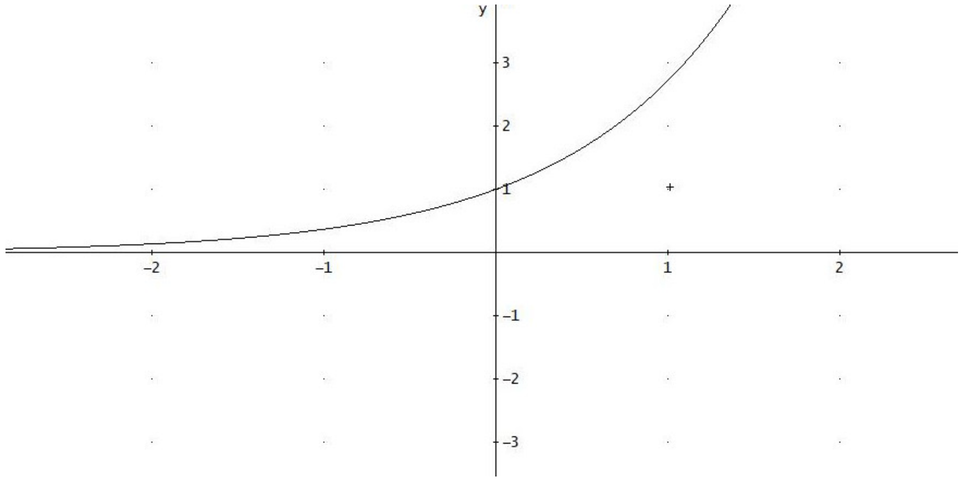


FIGURA 1. Grafico funzione esponenziale

mentre il fattore lineare $(ax+b)$ puó essere $\lesseqgtr 0$ a seconda dei valori di a e di b.

La funzione $g(x)$ é una funzione continua , quindi per essa vale il *Teorema di Weierstrass*. Per tale teorema la funzione $g(x)$ ammette un minimo e massimo assoluti, nell'insieme di definizione, che é tutto $\mathbb{R}$.

Determiniamo i valori di a e di b in corrispondenza dei quali le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ si incontrano nel punto $A(2;1)$, tale ipotesi é vera se le coordinate del punto A soddisfano contemporaneamente le equazioni delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$.

Se $A \in f(x)$ deve valere l'identitá

$$1 = a \cdot 4 - 2 + b \tag{0.14}$$

$$0 = -1 + 4a - 2 + b \tag{0.15}$$

$$4a + b - 3 = 0 \tag{0.16}$$

Se $A \in g(x)$ deve valere l'identitá

$$1 = (2a+b) \cdot e^{4-4} = (2a+b) \cdot e^{0} = (2a+b) \tag{0.17}$$

cioé

$$1 = 2a + b \tag{0.18}$$

visto che le due condizioni devono sussistere contemporaneamente possiamo metterle a sistema

$$\begin{cases} 4a + b - 3 = 0, \\ 1 = 2a + b, \end{cases} \tag{0.19}$$

Si tratta di un semplicissimo sistema lineare di due equazioni in due incognite , e lo si puó benissimo risolvere facilmente per sostituzione , la soluzione é

$$a = 1\ ;\ b = -1 \tag{0.20}$$

Da questo momento in poi le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ saranno

$$f(x) = y = x^2 - x - 1 \tag{0.21}$$

e

$$g(x) = y = (x - 1) \cdot e^{2x - x^2} \tag{0.22}$$

Studiamo la parabola

$$y = x^2 - x - 1 \tag{0.23}$$

si tratta di una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle Y e con convavitá verso l'alto. É della forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

La formula del vertice é

$$V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right) \tag{0.24}$$

con $\Delta = b^2 - 4ac$

$$V\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{4}\right) \tag{0.25}$$

Calcoliamo i punti di intersezione della parabola con l'asse delle ascisse X, cioé studiamo il sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - x - 1, & ; \\ y = 0, & . \end{cases} \tag{0.26}$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \backsimeq 1.62 \tag{0.27}$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \backsimeq -0.62 \tag{0.28}$$

Il problema richiede di dimostrare che le due funzioni sono tra loro tangenti nel punto $B(0;-1)$. *Sappiamo che due curve sono tra loro tangenti in un punto se in quel punto hanno la stessa retta tangente.*

Anzi, possiamo dire anche qualcosa in piú , visto che il punto è fissato, possiamo dire che sono tangenti se $f^{'}(x_0) = g^{'}(x_0)$.

Ricordiamo che l'equazione della retta tangente ad una curva in un suo punto $P_0(x_0;y_0)$ é

$$y - y_0 = f^{'}(x_0) \cdot (x - x_0) \tag{0.29}$$

Nel nostro caso

$$f^{'}(x) = 2x - 1 \tag{0.30}$$

$$f^{'}(0) = -1 \tag{0.31}$$

Calcoliamo la derivata di $g(x)$

$$g^{'}(x) = \left[(x-1)\cdot e^{2x-x^2}\right]^{'} = (x-1)^{'}\cdot e^{2x-x^2} + (x-1)\cdot(e^{2x-x^2})^{'} = \tag{0.32}$$

$$e^{2x-x^2} + (x-1)\cdot e^{2x-x^2}\cdot(2-2x) = e^{2x-x^2}\left[1+(x-1)(2-2x)\right] =$$

$$= e^{2x-x^2}\left[1+2x-2x^2-2+2x\right] = e^{2x-x^2}\left[-2x^2+4x+1\right]$$

In definitiva

$$g^{'}(x) = e^{2x-x^2}\left[-2x^2+4x+1\right] \tag{0.33}$$

Per $x = 0$ si ha

$$g^{'}(0) = e^0\cdot(0+0-1) \tag{0.34}$$

$$g^{'}(0) = 1\cdot(-1) \tag{0.35}$$

$$g^{'}(0) = -1 \tag{0.36}$$

A questo punto , avendo verificato che i coefficienti angolari delle tangenti alle due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ nel punto $B(0;-1)$ sono gli stessi, possiamo affermare che le 2 funzioni sono tra loro tangenti in $B(0;-1)$.

L'equazione della tangente in $B(0;-1)$ é

$$y - (-1) = (-1)(x-0)$$

$$y + 1 = -x$$

$$y = -x + 1 \tag{0.37}$$

Studiamo la funzione

$$g(x) = (x-1) \cdot e^{2x - x^2} \qquad [38]$$

si osserva immediatamente che $C.E. = \mathbb{R}$ poiché il fattore $(x-1)$ è definito in tutto $\mathbb{R}$ e il fattore e^{2x-x^2} è definito in tutto $\mathbb{R}$.

In precedenza abbiamo visto che

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$$

per cui possiamo affermare che la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per la funzione $y = g(x)$

~

Studiamo il segno di $g(x)$

Studiamo

$$g(x) > 0$$

il fattore $e^{2x-x^2} > 0$ sempre, per cui

il segno dipende dal fattore $(x-1) > 0$ (9)

$x-1 > 0$, $x > 1$

(39)

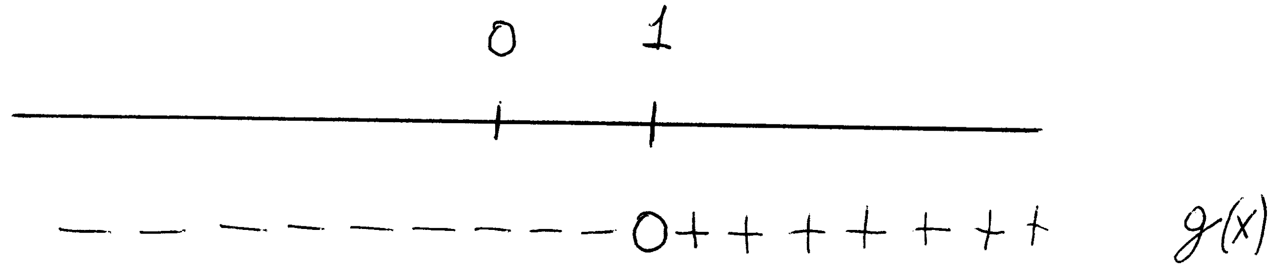
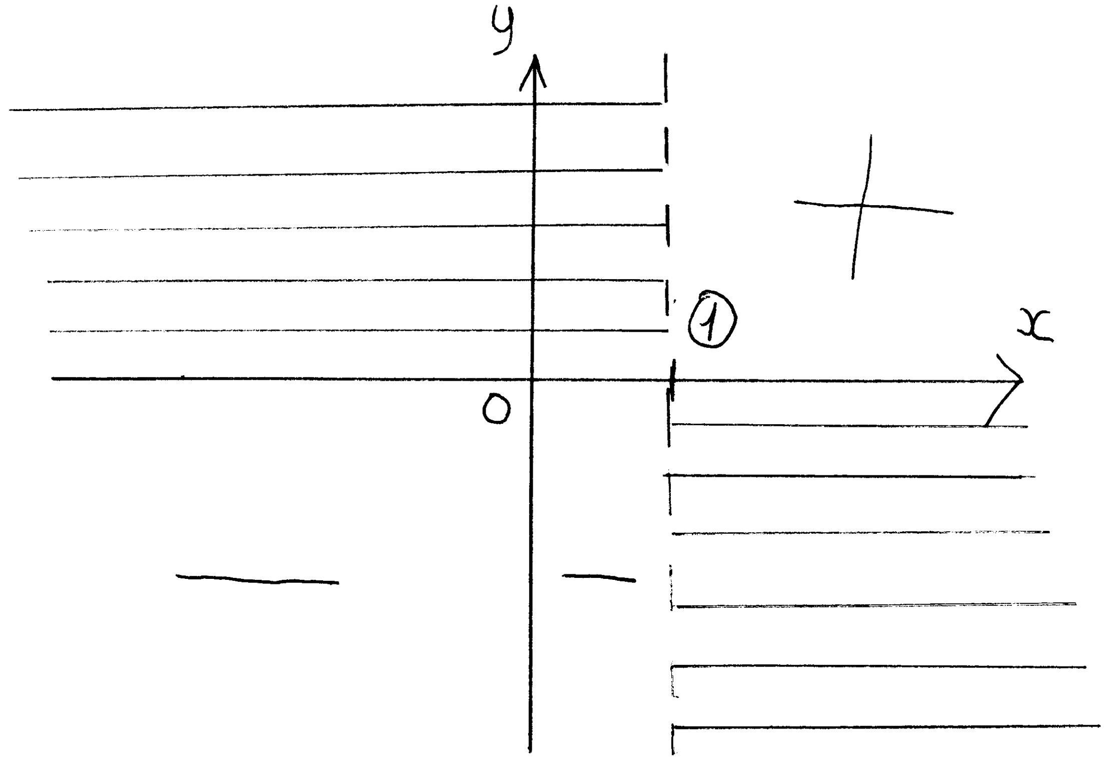


Grafico nel piano della positività e negatività della funzione $g(x)$.



(40)

Studiamo l'intersezione tra la funzione $g(x)$ e l'asse delle X che ha equazione $y=0$

(10)

$$\begin{cases} y = (x-1)\cdot e^{2x-x^2} \\ y = 0 \end{cases}$$

(41)

$$\begin{cases} 0 = (x-1)\cdot e^{2x-x^2} \\ y = 0 \end{cases}$$

studiamo il fattore

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

(42)

Per il 2° fattore si ha

$$e^{2x-x^2} = 0$$

che per il grafico della funzione esponenziale non ha soluzioni.

Per cui la funzione $g(x)$ incontra l'asse X (11)
nel punto $C(1,0)$.

Studiamo l'intersezione della $g(x)$ con l'asse Y
che ha equazione $x=0$

$$\begin{cases} y=(x-1)\cdot e^{2x-x^2} \\ x=0 \end{cases} \qquad (43)$$

$$\begin{cases} y=(0-1)\cdot e^{0} \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=(-1)\cdot(1) \\ x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-1 \\ x=0 \end{cases} \qquad (44)$$

La funzione $g(x)$ incontra l'asse Y nel punto
$B(0;-1)$

Studiamo $g'(x)$ (12)

avevamo calcolato che

$$g'(x) = e^{2x-x^2}(-2x^2+4x-1) \quad (45)$$

Ricerchiamo gli eventuali punti candidati a essere punti di MAX, Min, Flesso a tangente orizzontale, per cui studiamo

$$g'(x) = 0$$

$$e^{2x-x^2}(-2x^2+4x-1) = 0$$

Visto che $e^{2x-x^2} > 0$ sempre, quindi studiamo

$$-2x^2+4x-1=0$$

$$2x^2-4x+1=0; \quad \Delta = b^2-4ac = 16-4(2)(1) =$$

$= 16-8. \quad \Delta = 8$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} =$$

$$= \frac{2(2 \pm \sqrt{2})}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} = 0{,}3 = X_4 \\ \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} = 1{,}7 \quad X_3 \end{cases} \qquad (46)$$

In definitiva la derivata prima $g'(x)$

si annulla nei punti

$$X_3 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \quad e \quad X_4 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \qquad (47)$$

Studiamo $g'(x) > 0$

Il fattore e^{2x-x^2} è sempre > 0, studiamo

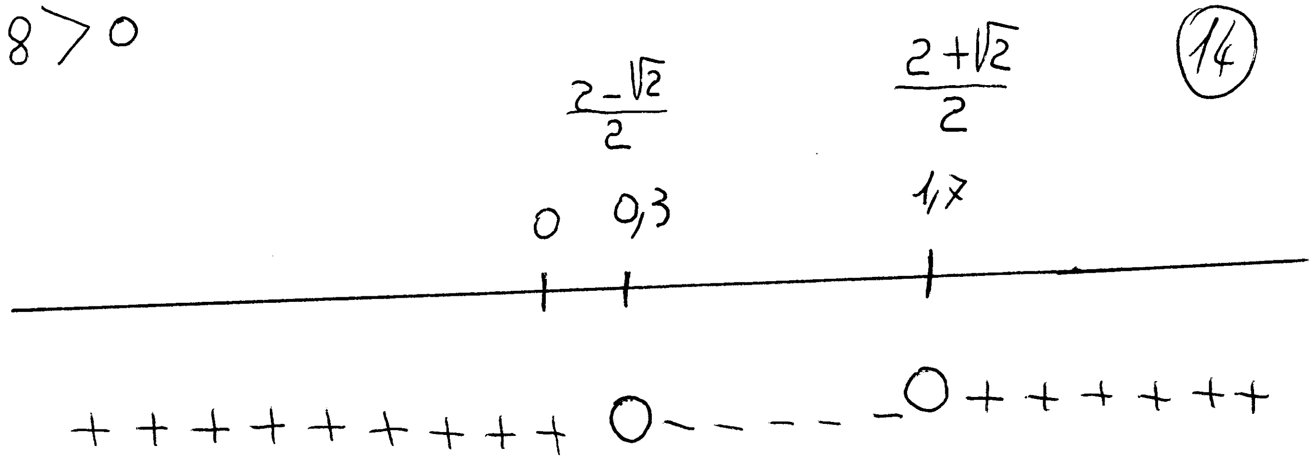
il fattore

$$-2x^2+4x-1>0 \qquad (48)$$

Moltiplichiamo la (48) per (-1)

$$2x^2-4x+1<0 \qquad (49)$$

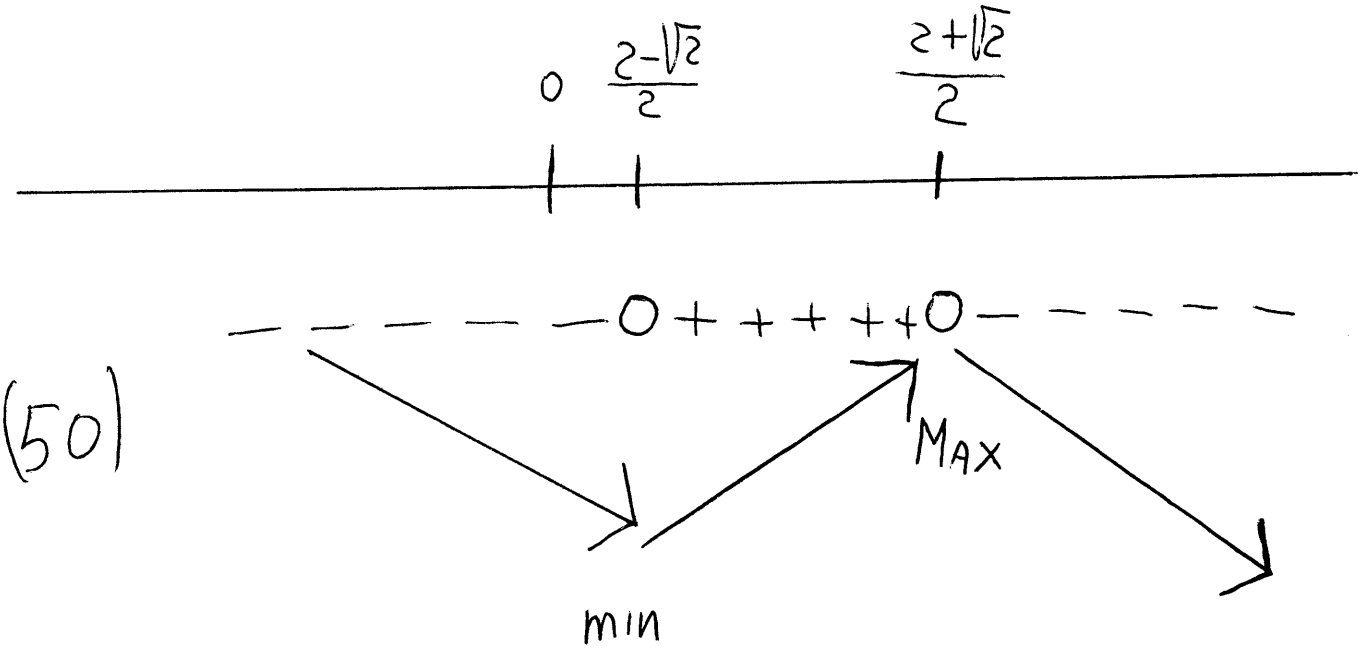
$\Delta = 8 > 0$



Questo è il grafico della (49) ma noi vogliamo il grafico della disequazione (48)

$$-2x^2+4x-1>0$$

per cui moltiplichiamo il grafico per (−1)



(50)

Dal grafico si evince che per

$x_3 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ si ha un MAX relativo e (51)

per

$x_4 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ si ha un Min relativo (52)

Calcoliamo l'ordinata del min

$$g\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = \left[\frac{2-\sqrt{2}}{2} - 1\right] \cdot e^{\cancel{2}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$$

$$= \left(\frac{2-\sqrt{2}-2}{2}\right) \cdot e^{2-\sqrt{2} - \left(\frac{4+2-4\sqrt{2}}{4}\right)} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{8-4\sqrt{2}-(6-4\sqrt{2})}{4}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{8-\cancel{4\sqrt{2}}-6+\cancel{4\sqrt{2}}}{4}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{e} = -\frac{\sqrt{2e}}{2}$$ (16)

In definitiva le coordinate del minimo sono

$$\min\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} ; -\frac{\sqrt{2e}}{2}\right) \quad (53)$$

$$\min\left(0{,}292 ; -1{,}164\right) \quad (54)$$

~

Calcoliamo l'ordinata del MAX

$$g\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2} - 1\right) \cdot e^{2\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$$

$$= \left(\frac{2+\sqrt{2}-2}{2}\right) \cdot e^{2+\sqrt{2} - \left(\frac{4+2+4\sqrt{2}}{4}\right)} =$$

(17)

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{2+\sqrt{2} - \frac{6+4\sqrt{2}}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{8+\cancel{4\sqrt{2}}-6-\cancel{4\sqrt{2}}}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{e} =$$

$$= \frac{\sqrt{2e}}{2}$$

In definitiva

$$g\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2e}}{2}$$

Per cui le coordinate del MAX sono

$$MAX\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2e}}{2}\right) \qquad (55)$$

$$MAX\left(1{,}71 ; 1{,}50\right) \qquad (56)$$

Calcoliamo la derivata seconda $g''(x)$

$$g''(x) = \left[e^{2x-x^2}\cdot(-2x^2+4x-1)\right]' = \quad (57)$$

$$= e^{2x-x^2}\cdot(2-2x)\cdot(-2x^2+4x-1)+e^{2x-x^2}\cdot(-4x+4) =$$

$$= e^{2x-x^2}\cdot(2-2x)\cdot(-2x^2+4x-1)+2\cdot e^{2x-x^2}\cdot(2-2x) =$$

$$= (-)\cdot(-)\cdot e^{2x-x^2}\cdot(2x-2)(2x^2-4x+1)-2(2x-2)\cdot$$

$$\cdot e^{2x-x^2} = e^{2x-x^2}\cdot(2x-2)\cdot(2x^2-4x+1)-2(2x-2)\cdot$$

$$\cdot e^{2x-x^2} =$$

$$= 2 \cdot (x-1) \cdot e^{2x-x^2} \cdot (2x^2-4x+1) - 4(x-1) \cdot$$

$$\cdot e^{2x-x^2} =$$

$$= 2(x-1) \cdot e^{2x-x^2} \left[2x^2-4x+1-2 \right] =$$

$$= 2(x-1) \cdot e^{2x-x^2} \left[2x^2-4x-1 \right] = g''(x)$$

In definitiva

(58) $$g''(x) = 2(x-1) \cdot (2x^2-4x-1) \cdot e^{2x-x^2}$$

Per trovare i punti di flesso a tangente obliqua dobbiamo studiare

(59) $$g''(x) = 0$$

Il fattore e^{2x-x^2} è sempre >0 quindi non lo studiamo $(=0)$. (20)

Studiamo il fattore

$$(x-1)=0$$

da cui $x_g=1$ (60)

Studiamo

$$2x^2-4x-1=0 \qquad (61)$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4(2)(-1)}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{16+8}}{4}=$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{24}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{2^3\cdot 3}}{4}=$$

$$=\frac{4\pm 2\sqrt{6}}{4}=\frac{2(2\pm\sqrt{6})}{4}=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}=$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{6}}{2} = x_7 \simeq -0,11 \\ \\ \dfrac{2+\sqrt{6}}{2} = x_8 \simeq 1,1 \end{cases} \qquad (62)$$

Riassumiamo, i punti che annullano la $g''(x)$ hanno ascissa

$$x_9 = 1 \; ; \; x_7 = \frac{2-\sqrt{6}}{2} \; ; \; x_8 = \frac{2+\sqrt{6}}{2} \qquad (63)$$

Studiamo $g''(x) > 0$

$$2 \cdot e^{2x-x^2} \cdot (x-1)(2x^2-4x-1) > 0 \qquad (64)$$

Il fattore $2 \cdot e^{2x-x^2} > 0$ è sempre > 0.

Studiamo il fattore

$$x-1 > 0 \qquad (65)$$

$$x > 1$$

Per $x>1$, $(x-1)$ è >0.

Studiamo il fattore

$$2x^2-4x-1>0 \qquad (66)$$

Le soluzioni dell'equazione associata

$$2x^2-4x-1=0$$ sono

$$x_7 = \frac{2-\sqrt{6}}{2} \cong -0,11 \qquad (67)$$

$$x_8 = \frac{2+\sqrt{6}}{2} \cong 1,1$$

$\Delta = 6 > 0$

Per cui essendo la (66) della famiglia >0

e il $\Delta > 0$ si ha che:

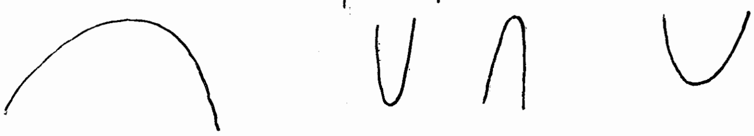
$\frac{2-\sqrt{6}}{2}$ $\quad 0 \quad 1 \quad$ $\frac{2+\sqrt{6}}{2}$

(68)

$- - - - - - - - 0 + + + + + + \quad (x-1)$

$+ + + + + + 0 - - - - - 0 + + + + + + \quad (2x^2-4x-1)>0$

$- - - - - - - 0 + + + 0 - - 0 + + + + + + +$ TOTALE



Da cui si evince che la $g(x)$

in $\left]-\infty; \frac{2-\sqrt{6}}{2}\right[$ ha la concavità verso l'alto,

cioè è convessa;

per $x = \frac{2-\sqrt{6}}{2}$ si ha un flesso discendente a

tangente obliqua;

in $\left]\frac{2-\sqrt{6}}{2}; 1\right[$ è concava

in $x=1$ c'è un flesso ascendente a

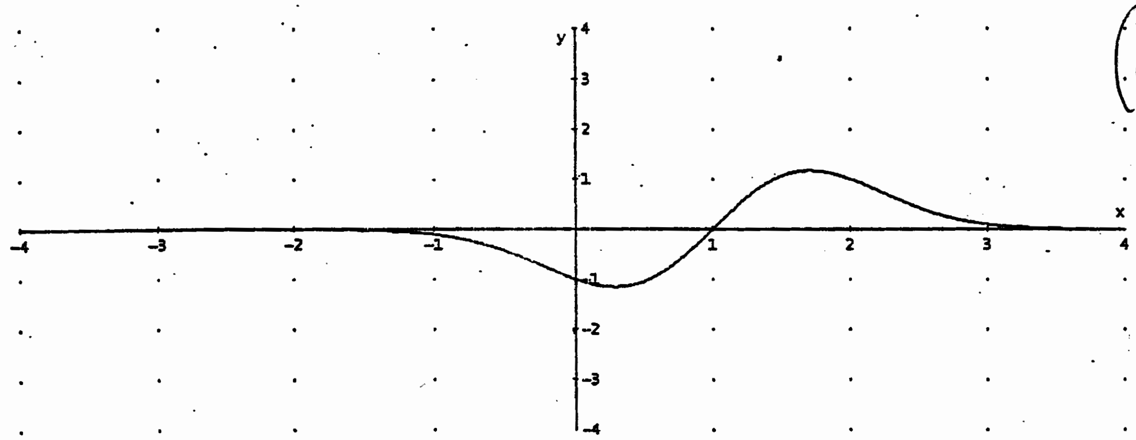
tangente obliqua.

in $\left]1; \frac{2+\sqrt{6}}{2}\right[$ $g(x)$ ha concavità verso il basso;

per $x = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$ si ha un flesso discendente a tangente obliqua;

in $\left]\frac{2+\sqrt{6}}{2}; +\infty\right[$ $g(x)$ ha la concavità verso l'alto.

GRAFICO di $g(x)$:



(69)

Guardando il grafico di $g(x)$, si osserva, che per il flesso a tangente obliqua di ascissa $x_g = 1$, ci potrebbe essere una Simmetria Centrale.

Calcoliamo l'ordinata del flesso

$$g(1) = (1-1) \cdot e^{2\cdot 1 - 1^2} = 0 \qquad (70)$$

$$g(1) = 0$$

Per cui il flesso ha coordinate

$$F_g(1; 0)$$

Ricordiamo le formule della simmetria centrale, rispetto ad un generico punto C di simmetria

$$C(x_c; y_c)$$

che nel nostro caso sarebbe

$$C(1;0)$$

$$\begin{cases} x' = 2 \cdot x_c - x \\ y' = 2 y_c - y \end{cases}$$

Da cui

$$\begin{cases} x' = 2 \cdot 1 - x \\ y' = 2 \cdot 0 - y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 0 - y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = -y \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x = 2 - x' \\ y = -y' \end{cases} \qquad (71)$$

Sostituiamo le (71) nell'equazione $f(x)$

$$y = (x-1) \cdot e^{2x - x^2}$$

(27)

$$-y' = (2 - x' - 1) \cdot e^{2\cdot(2-x') - (2-x')^2}$$

$$-y' = (1 - x') \cdot e^{\cancel{4} - 2x' - \cancel{4} - (x')^2 + 4x'}$$

$$-y' = (1 - x') \cdot e^{2x' - (x')^2}$$

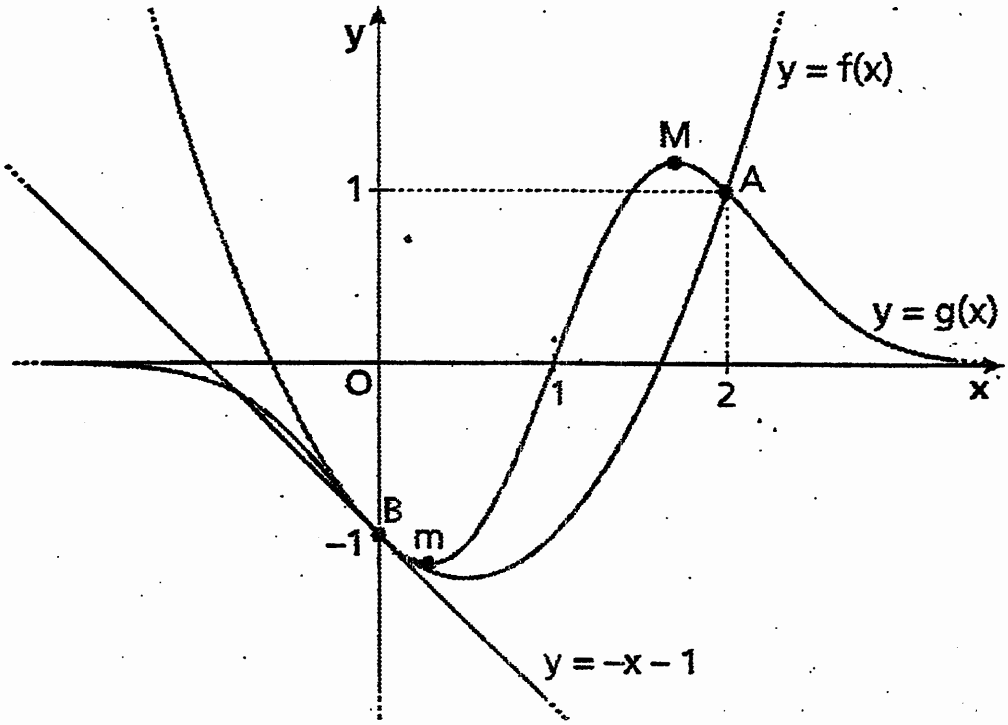
$$y' = (x' - 1) \cdot e^{2x' - (x')^2} \qquad (72)$$

da cui si evince che c'è una simmetria centrale rispetto al centro di simmetria $C(1;0)$ che coincide con un flesso a tangente obliqua.

La traccia dice che $f(x)$ e $g(x)$ si incontrano nel punto $A(2;1)$

Grafico di $f(x)$ e di $g(x)$:

28



L'area è data da:

$$\int_0^2 \left[g(x)-f(x)\right] dx = \int_0^2 (x-1)\cdot e^{2x-x^2} - (x^2-x-1)\ dx =$$

$$= \int_0^2 (x-1)\cdot e^{2x-x^2}\ dx - \int_0^2 x^2-x-1\ dx \ ; \qquad (73)$$

Calcoliamo i due integrali separatamente

$$\int_0^2 (x-1)\cdot e^{2x-x^2}\ dx \qquad (74)$$

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int (x-1)\cdot e^{2x-x^2}\ dx \qquad (75)$$

Lo svolgiamo per sostituzione (30)

poniamo $2x - x^2 = t$ (76)

da cui differenziando

$$(2-2x)\,dx = dt$$

$$dx = \frac{dt}{2-2x} \qquad (77)$$

Per cui si ha

$$\int (x-1)\cdot e^{2x-x^2}\,dx = \int (x-1)\cdot e^{t}\cdot \frac{dt}{2(1-x)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cancel{(x-1)}\cdot e^{t}\cdot \frac{1}{-\cancel{(x-1)}}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \int e^{t} \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot e^{t} + C =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{2x-x^2} + C \qquad (78)$$

In definitiva

$$(79) \quad \int (x-1) \cdot e^{2x-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{2x-x^2} + C$$

Calcoliamo l'integrale definito

$$\int_0^2 (x-1) \cdot e^{2x-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} \cdot e^{2x-x^2} \right]_0^2 =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{4-4} - \left(-\frac{1}{2} e^{0-0} \right) = -\frac{1}{2} e^{0} + \frac{1}{2} e^{0} = 0$$

Per cui

$$\int_0^2 (x-1)\cdot e^{2x-x^2}\,dx = 0 \qquad (80)$$

~

Calcoliamo il semplice integrale

$$\int_0^2 x^2 - x - 1\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{2}\cdot 2^2 - 2 - \left(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot 0 - 0\right) =$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 2 = \frac{8}{3} - 2 - 2 = \frac{8}{3} - 4 = \frac{8-12}{3} =$$

$$= -\frac{4}{3}$$

In definitiva

$$\int_0^2 x^2 - x - 1 \, dx = -\frac{4}{3}$$

Torniamo alla

$$A = \int_0^2 \left[g(x) - f(x) \right] dx = 0 - \left(-\frac{4}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

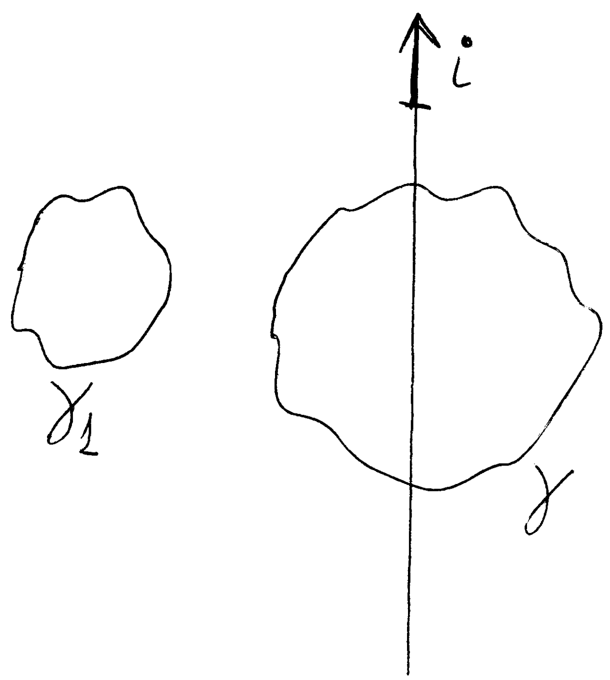
Possiamo quindi dire che l'area compresa tra i grafici delle 2 funzioni per il tratto $[0;2]$ è

$$A = \frac{4}{3} \qquad (81)$$

Sviluppiamo il punto 3

È importantissimo calcolare se i punti P_2 e P_3 sono interni o esterni all'area in questione.

È fondamentale ricordare il concetto di corrente concatenata ad un contorno, ad una frontiera.



"Una corrente i è concatenata ad un percorso γ se tale corrente attraversa l'area di cui γ è il contorno"

Ad esempio la corrente i è concatenata a γ ma NON è concatenata a γ_1.

Per calcolare la circuitazione del Campo Magnetico dovremmo studiare l'integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} \overline{B} \cdot \overline{ds} \qquad (82)$$

dove $\overline{B}$ è il vettore campo magnetico e $\overline{ds}$ è il vettore perpendicolare all'area o alla porzione di area racchiusa dal contorno γ.

Per calcolare il valore ci avvaliamo del Teorema di Ampere sulle correnti concatenate.

Il punto $P_1\left(\frac{3}{2} ; 0\right)$ è di certo dentro l'area A, per osservazione visiva.

Per verificare se il punto P_3 è dentro l'area A dobbiamo controllare l'ordinata del punto P_3 e

confrontarla con quella della parabola
$y = x^2 - x - 1$.

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{9-6-4}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

Da cui si evince che il punto <u>P_3 è esterno</u> rispetto all'area di contorno γ.

Essendo P_3 esterno è bene ricordare che non da alcun contributo circa le correnti concatenate.

~

Verifichiamo se P_2 è interno o esterno all'area.

In questo caso dobbiamo confrontare l'ordinata di P_2 con l'ordinata della funzione $f(x)$

$$f(x) = (x-1) \cdot e^{2x - x^2} \qquad (83)$$

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 1\right) \cdot e^{2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{9}{4}}$$

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3-2}{2}\right) \cdot e^{3 - \frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{12-9}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{e^3} = \frac{1}{2} \cdot (2{,}71)^{0{,}75} =$$

$$= 1{,}056 \quad (84)$$

P_2 è intorno all'area per cui da contributo alle correnti concatenate.

Noi sappiamo che per il teorema di Ampere vale

$$\int_\gamma \overline{B} \cdot \overline{dS} = \mu_0 \cdot i \quad (85)$$

dove μ_0 è la permeabilità magnetica nel vuoto, e i sono le correnti concatenate al circuito. (38)

Inoltre sappiamo che se i_2 è concorde a i_1, la circuitazione aumenta, se i_2 è discorde a i_1, la circuitazione diminuisce.

i_1 è di $2A$ ed è uscente dal foglio, se i_2 è entrante e se è di $2\,A$, la circuitazione è nulla.

Chiamiamo $+$ il verso di i_1

$$\oint \overline{B} \cdot \overline{ds} = \Gamma(B) = \mu_0 \cdot i_1 + \mu_0 \cdot i_2 =$$

$$= \sum_{K=1}^{2} \mu_0\, i_K = \mu_0 \sum_{K=1}^{2} i_K = \mu_0 (2 + i_2) \quad (86)$$

In definitiva

$$\int \overline{B} \cdot \overline{ds} = \mu_0 (i + i_2) \qquad (87)$$

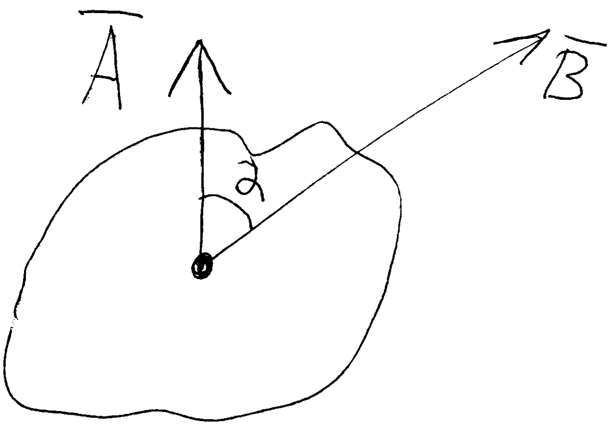
~

Svolgimento del Punto 4.

La spira di area A, ruota intorno all'asse x con velocità costante ω, il campo magnetico $|B| = 1,5 \cdot 10^{-2}\ T$, $i_{max} = 5\ mA = 5 \cdot 10^{-3} A$.

Noi sappiamo che

$$f_{em} = - \frac{d\, \phi_A(B)}{dt} \qquad (88)$$



Sappiamo che il flusso magnetico è

$$\Phi_A(B) = \bar{B} \cdot \bar{S} = B \cdot S \cdot \cos\alpha \qquad (89)$$

Ma α per il moto circolare uniforme è

$$\alpha = \omega \cdot t \qquad (90)$$

dove ω è la velocità angolare, t è il tempo, per cui:

$$\Phi_A(B) = B \cdot S \cdot \cos(\omega \cdot t) \qquad (91)$$

Da cui

$$f_{em} = -\frac{d(B \cdot S \cdot \cos(wt))}{dt} =$$

$$= -B \cdot S \cdot \left(-\operatorname{sen}(wt)\right) \cdot w =$$

$$= B \cdot S \cdot w \cdot \operatorname{sen}(wt)$$

Per cui la forza elettromotrice indotta

$$f_{em} = B \cdot S \cdot w \cdot \operatorname{sen}(wt) \qquad (92)$$

Visto che c'è la funzione seno il suo massimo è

$$\operatorname{sen}(wt) = 1 \qquad (93)$$

Per cui la $f_{em(MAX)}$ vale

$$f_{em(MAX)} = B \cdot S \cdot w \qquad (94)$$

Inoltre, per la legge di Ohm si ha che (42)

$$f_{em(MAX)} = i_{MAX} \cdot R \qquad (95)$$

resistenza $R = 0{,}2\ \Omega$

$$f_{em(MAX)} = \left(5 \cdot 10^{-3} A\right) \cdot (0{,}2\ \Omega) = 1 \cdot 10^{-3} V$$

$$f_{em(MAX)} = 10^{-3} V$$

Dalla formula

$$f_{em(MAX)} = B \cdot S \cdot \omega \qquad (96)$$

$$10^{-3} V = \left(1{,}5 \cdot 10^{-2} T\right) \cdot \frac{4}{3} \cdot \omega$$

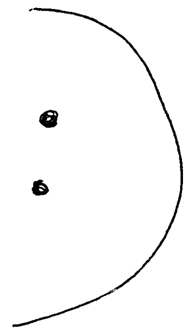
$$3 \cdot 10^{-3} = \left(1{,}5 \cdot 10^{-2}\right) \cdot 4 \cdot \omega$$

$$\omega = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{1{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 4} =$$

$$= \frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{2}}{6} = \frac{10^{-1}}{2} = \frac{1}{2 \cdot 10} = \frac{1}{20} =$$

$$= 0,05 \ \text{rad/s}$$

Cioè $\quad \omega = 0,05 \ \text{rad/s} \quad (97)$



Buona Estate