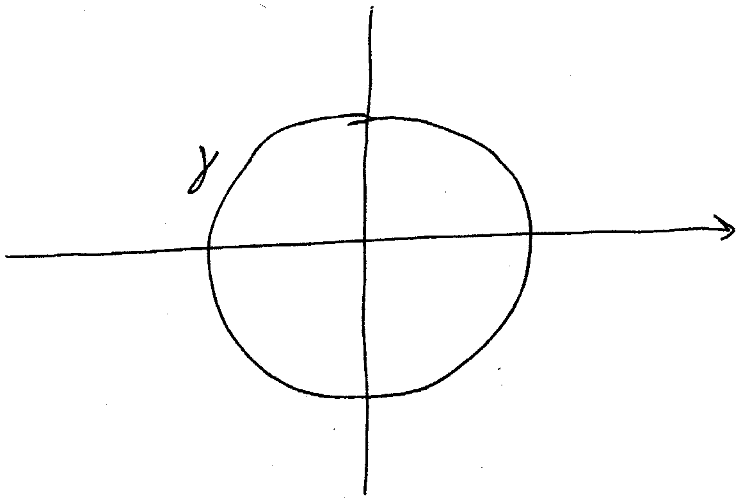
Area del cerchio



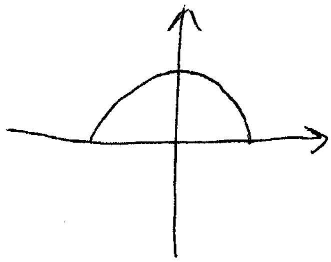
Sia γ una circonferenza di raggio R e centro nell'origine $C\equiv(0,0)$. Calcolare l'area con il calcolo integrale.

Equazione di γ: $x^2+y^2=R^2$ (1)

la scriviamo sotto forma di funzione ricavando y

$y^2=R^2-x^2$; $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$

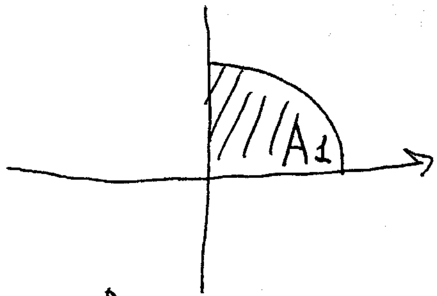
Consideriamo la semi circonferenza



$$y=\sqrt{R^2-x^2} \quad (2)$$

Se integriamo tale funzione da 0 a R

otteniamo $\frac{1}{4}$ dell'area della circonferenza



$$A_1 = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \, dx \qquad (3)$$

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \sqrt{R^2 - x^2} \, dx \qquad (4)$$

poniamo la sostituzione

$$x = R \operatorname{sen} t \qquad (5)$$

$$\sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R^2 - R^2 \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{R^2 (1 - \operatorname{sen}^2 t)} =$$

$$= R \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}$$

Riassumendo

$$\sqrt{R^2 - x^2} = R \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \qquad (6)$$

dalla relazione fondamentale della goniometria

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \quad (7)$$

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \quad ; \quad \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = \cos x \quad (8)$$

Inserendo la $(8) \rightarrow (6)$

$$\sqrt{R^2 - x^2} = R \cos t \quad (8)$$

Calcoliamo il dx dalla (5)

$$dx = R \cos t \; dt \quad (9)$$

Torniamo all'integrale (4)

$$\int \sqrt{R^2 - x^2} \; dx = \int R \cos t \cdot R \cos t \; dt =$$

$$= \int R^2 \cos t \; dt = R^2 \int \cos^2 t \; dt$$

Calcoliamo separatamente

$$\int \cos^2 t \, dt$$

dalla formula di bisezione del coseno si ha:

$$\int \cos^2 t \, dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} \, dt = \int \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} \, dt =$$

$$= \int \frac{1}{2} \, dt + \int \frac{\cos 2t}{2} \, dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \int \cos 2t \, dt$$

Calcoliamo separatamente $\int \cos 2t \, dt$

poniamo $2t = u$; $2 \, dt = du$; $dt = \frac{du}{2}$

$$\int \cos 2t \, dt = \int \cos u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \cos u \, du =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sen} u = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t$$

Riassumiamo

$$\int \cos 2t \, dt = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t$$

$$\int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \int \cos 2t \, dt \implies$$

$$\int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t \implies$$

$$\int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t$$

$$\int \sqrt{R^2 - x^2} \, dx = R^2 \int \cos^2 t \, dt \implies$$

$$\int \sqrt{R^2 - x^2} \, dx = R^2 \left[\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t \right] \qquad (7)$$

Riprendiamo la sostituzione

$x = R \operatorname{sen} t$ (5)

Con tale sostituzione noi dobbiamo integrare da $x = 0$ a $x = R$ per calcolare $\frac{1}{4}$ dell'area della circonferenza.

Determiniamo gli estremi dell'integrazione nella variabile t

1) da $x = 0 \Rightarrow 0 = R \operatorname{sen} t$;

$\operatorname{sen} t = 0$; $t = 0$.

2) da $x = R \Rightarrow R = R \operatorname{sen} t$; $\operatorname{sen} t = 1$;

$t = \frac{\pi}{2}$.

Quindi anziché integrare in x da 0 a R possiamo integrare in t da 0 a $\frac{\pi}{2}$

Ma nella variabile t noi avevamo svolto completamente l'integrale. Infatti

$$(7) \quad \int \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = R^2 \left[\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t \right]$$

Da cui:

$$\frac{A_{\text{circonferenza}}}{4} = R^2 \left[\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= R^2 \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 0 \right) \right] =$$

$$= R^2 \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} \pi - (0 + 0) \right] = R^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \underbrace{\operatorname{sen} \pi}_{0} \right) =$$

$$= R^2 \left(\frac{\pi}{4} + 0 \right) = R^2 \cdot \frac{\pi}{4}$$

Riassumiamo

$$\frac{A_{\text{circonferenza}}}{4} = R^2 \cdot \frac{\pi}{4}$$

che ui :

$$A_{circonferenza} = \pi R^2$$

:-)