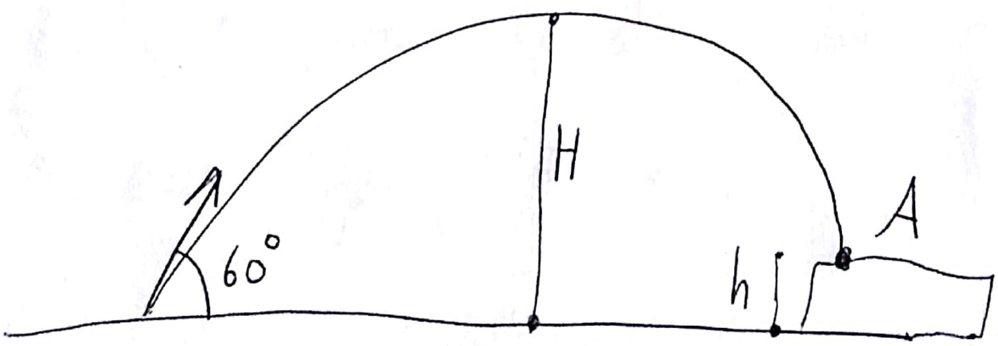
Un esercizio sul moto del proiettile

prof. FRANCESCO Zumbo

www.FRANCESCOZUMBO.it

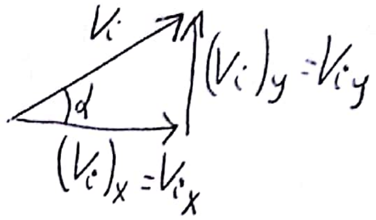
Problema sul proiettile

Una pietra viene lanciata verso un terrapieno di altezza h e viene lanciata con velocità iniziale $V_i = 42$ m/s e con un angolo di $60°$ rispetto all'orizzontale. La pietra cade nel punto A 5,50 s dopo il lancio. Trovare l'altezza h del terrapieno, la velocità della pietra subito prima dell'urto col terreno e la massima altezza H raggiunta dalla pietra.



Nel moto del proiettile sappiamo che il moto sull'asse orizzontale è un moto rettilineo uniforme, mentre sull'asse verticale è un moto rettilineo uniformemente accelerato.

$V_i = 42\ m/s$ e $\alpha = 60°$



$V_{ix} = V_i \cdot \cos\alpha$ (1)

$V_{ix} = 42 \cdot \cos 60° = 21\ m/s$

Essendo un moto uniforme $\forall x \Rightarrow V_x = 21\ m/s$

Lo spazio sull'asse X

$X = V_{ix} \cdot t$ (2)

per cui se la pietra colpisce il punto A in 5,50 s

$X = 21 \cdot 5,5 = 115,5\ m$

per cui l'ascissa del punto A è $X = 115,5\ m$

Sull'asse Y il moto è rettilineo uniformemente ③
accelerato, per cui il legame tra le velocità è

(3) $V_{iy} = V_i \cdot \text{sen}\,\alpha = 42 \cdot \text{sen}\,60° = 36{,}37\ m/s$

$V_y = V_{iy} - gt$ (4)

$V_y = 36{,}37 - 9{,}81 \cdot t$

$V_y = 36{,}37 - 9{,}81 \cdot 5{,}50 = 36{,}37 - 53{,}955 =$

$= -17{,}585$

$V_y(\text{nel punto } A) = -17{,}585\ m/s$ il segno (−)

indica che è rivolta verso il basso.

Per cui in A la velocità ha componenti $(21\ m/s\,;\ 17{,}585\ m/s)$

Per lo spazio sull'asse Y abbiamo usare
la legge oraria (adattata) del moto rettilineo uniformemente
accelerato

$$y = V_{iy} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} \qquad (5)$$

dopo 5,50 s si ottiene

$$y = 36{,}37 \cdot (5{,}50) - \frac{(9{,}81) \cdot (5{,}50)^2}{2} =$$

$$= 200{,}035 - 148{,}376 = 51{,}659$$

$$y(\text{nel punto } A) = 51{,}659$$

quindi $h = 51{,}659 \text{ m} \simeq 51{,}7 \text{ m}$

La velocità in A vale:

$$(6) \quad V(A) = \sqrt{[V_x(A)]^2 + [V_y(A)]^2} = \sqrt{(21)^2 + (-17{,}585)^2} =$$

$$= \sqrt{750{,}232} = 27{,}39 \text{ m/s}$$

La velocità in A è $V(A) = 27{,}39$ m/s

L'altezza massima raggiunta si ottiene in corrispondenza della metà della gittata

La formula della gittata è

(7) $$X = \frac{2 \cdot V_{ix} \cdot V_{iy}}{g}$$

$$X = \frac{2 \cdot (21) \cdot (36,37)}{9,81} = 155,71 \text{ m}$$

gittata: $X = 155,71 \text{ m}$

$$\frac{\text{Gittata}}{2} = 77,855 \text{ m}$$

In corrispondenza di tale ascissa, l'ordinata rappresenta l'altezza massima.

Ricaviamo il tempo dalla (2) $X = V_{ix} \cdot t$

$$t = \frac{X}{V_{ix}} \quad (8)$$

e lo sostituiamo nella (5)

(5) $$y = V_{iy} \cdot t - \frac{g t^2}{2} \quad ;$$

$$y = V_{iy} \cdot \frac{x}{V_{ix}} - \frac{g \cdot \left(\frac{x^2}{V_{ix}^2}\right)}{2} \quad ;$$

$$y = \left(\frac{V_{iy}}{V_{ix}}\right) \cdot x - \frac{\frac{g \cdot x^2}{V_{ix}^2}}{2} \quad ;$$

$$y = \left(\frac{V_{iy}}{V_{ix}}\right) \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot V_{ix}^2} \qquad (9)$$

La (9) rappresenta l'equazione del moto parabolico in funzione delle componenti della velocità iniziale e dell'ascissa x del moto.

Se sostituiamo alla x nella (9) la metà della gittata e calcoliamo la y, tale y è l'altezza massima raggiunta

$$y = \left(\frac{36,37}{21}\right) \cdot (77,855) - \frac{(9,81) \cdot (77,855)^2}{2 \cdot (21)^2}$$

$y = 134{,}837 - 67{,}4176$

$y = 67{,}42\ m$

Tale altezza massima si sarebbe potuta ricavare per altra via, cioè, dopo aver calcolato la gittata, che è una ascissa, si deve calcolare il tempo per percorrere la gittata, essendo il moto uniforme si considera la metà del tempo della gittata, e lo si sostituisce nella (5), la y così calcolata è l'altezza massima.

$\frac{Gittata}{2} = 77{,}855\ m$

Da $x = V_{ix} \cdot t \implies$

$77{,}855 = 21 \cdot t$

$t = \frac{77{,}855}{21} = 3{,}7\ s$

Cioè l'altezza massima la si raggiunge dopo 3,7 s dal lancio.

Calcoliamo la y dopo 3,7 s

$$y = V_{iy} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$y = 36,37 \cdot (3,7) - \frac{9,81 \cdot (3,7)^2}{2}$$

$$y = 134,569 - \frac{134,30}{2} = 67,42$$

Questo secondo metodo è più veloce.

:)